

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

В. Г. Пименов

**Разностные методы
решения уравнений
в частных производных
с наследственностью**

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 519.63

П 325

Рецензент

А. И. К о р о т к и й, доктор физико-математических наук,
профессор (Институт математики и механики имени
Н. Н. Красовского УрО РАН);

Научный редактор

А. Б. Л о ж н и к о в, кандидат физико-математических наук

Пименов, В. Г.

П 325 Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью / В. Г. Пименов ; [науч. ред. А. Б. Ложников] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. — 134 с.

ISBN 978-5-7996-1364-8

В книге приводятся численные алгоритмы решения дифференциальных уравнений в частных производных с эффектом запаздывания. Для обоснования сходимости дается общая разностная схема решения функционально-дифференциальных уравнений, к которой затем сводятся различные численные методы решения уравнений параболического, гиперболического типов и уравнений переноса с наследственностью.

Для специалистов в области вычислительной математики, компьютерных наук и математического моделирования. Книга также будет полезна студентам старших курсов и аспирантам.

УДК 519.63

ISBN 978-5-7996-1364-8

© Пименов В. Г., 2014
© Уральский федеральный
университет, 2014

Оглавление

1. Введение	5
2. Общая дискретная схема с эффектом наследственности	10
3. Численные методы решения одномерного уравнения теплопроводности с наследственностью. Результаты получены совместно с А. Б. Ложниковым	15
3.1. Постановка задачи и основные предположения .	15
3.2. Сеточные схемы с весом	16
3.3. Вложение схемы с весом в общую разностную схему с последствием	22
3.4. Примеры численных расчетов	26
4. Метод переменных направлений для решения двухмерного уравнения параболического типа с наследственностью. Результаты получены совместно с А. В. Лекомцевым	31
4.1. Постановка задачи и основные предположения .	31
4.2. Метод переменных направлений	34
4.3. Вложение схемы переменных направлений в общую разностную схему с последствием	39
4.4. Численное моделирование	46
5. Численные методы решения гиперболического уравнения с наследственностью. Результаты получены совместно с Е. Е. Ташировой	52
5.1. Постановка задачи	52
5.2. Разностный метод	53
5.3. Исследование сходимости	58
5.4. Примеры численных расчетов	66

6. Сеточные методы решения уравнения переноса с наследственностью	73
6.1. Постановка задачи	73
6.2. Дискретизация задачи	75
6.3. Методы первого порядка. Результаты получены совместно с Л. С. Волканиным	77
6.4. Методы второго порядка по пространственной переменной. Результаты получены С. И. Солодушкиным	81
6.5. Метод второго порядка по временной переменной	89
6.6. Метод второго порядка по временной и пространственной переменной. Результаты получены совместно со С. В. Свиридовым	91
6.7. Численные эксперименты. Результаты получены совместно со С. В. Свиридовым	97
7. Численные методы решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений. Результаты получены совместно с М. А. Паначевым	104
7.1. Постановка задачи и предположения	104
7.2. Одношаговые методы типа Рунге–Кутты	105
7.3. Многошаговые методы	111
7.4. Многошаговые методы, не требующие разгона .	115
7.5. Сведение решения уравнения переноса с наследственностью к решению смешанных функционально-дифференциальных уравнений и численные эксперименты	117
Список литературы	120

1. Введение

Многие модели окружающей действительности одновременно содержат два эффекта: распределенность параметров и динамику с эффектом наследственности. Математическим описанием таких объектов могут служить дифференциальные уравнения в частных производных с запаздываниями различных видов по времени, см., например, работы [1, 3, 6, 7, 9, 10, 40, 45, 58, 59, 69–71, 73, 74, 82, 84, 85, 99]. Качественные аспекты математической теории подобных уравнений изучались в различных работах, например, в [31, 32, 60, 72, 75, 79, 80, 84, 88, 91, 97, 98, 100, 102, 103], большая часть общих результатов приведена в монографии [99], где объектом исследований выступает уравнение вида

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(u_t),$$

где t — независимая переменная, u — элемент банахова пространства (искомая функция состояния), $u_t = \{u(t + \xi), -\tau \leq \xi \leq 0\}$ — предыстория состояния, τ — положительная величина запаздывания, f — нелинейное отображение, A — инфинитезимально порождающий оператор полугруппы.

Такие уравнения содержат, в частности, уравнения параболического типа с функциональным запаздыванием общего вида (называемого также наследственностью), уравнения гиперболического типа с наследственностью, уравнения переноса с наследственностью и т. д. Можно считать, что качественная теория таких уравнений развита достаточно хорошо.

Однако в приложениях математического моделирования, в силу сложности объектов и невозможности применения аналитических методов отыскания решений, на первый план выходят численные методы, и в области численных методов результатов значительно меньше.

Не претендуя на полноту, отметим подходы к численным методам решения уравнений в частных производных с запаздыванием и работы, в которых изложены эти подходы.

Возможно, одной из первых в этой тематике была работа [92], в которой с позиций присущей автору методики предлагалось проводить дискретизацию с помощью непрерывных методов, чтобы избежать интерполяции между узлами сетки. Таким способом можно, в частности, построить аналог схемы Кранка–Никольсон для решения уравнения параболического типа с запаздыванием общего вида. Однако непрерывные алгоритмы сложны и далеко не исчерпывают всего разнообразия численных методов.

Варианты метода прямых, в которых проводится дискретизация только по переменным состояния, сводят задачи к численному решению систем функционально-дифференциальных уравнений [94, 104, 105]. Теория функционально-дифференциальных уравнений, т. е. обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием общего вида, хорошо разработана в различных аспектах и стала уже классической, см. книги [2, 16, 19, 43, 47, 49, 51], развиты и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений, см. обзоры в [15, 44, 54]. Однако при такой дискретизации возникают жесткие системы [42, 44], жесткость которых возрастает при увеличении числа точек разбиения по состоянию.

Группой польских математиков разрабатывались сеточные методы решения эволюционных уравнений с функциональной зависимостью искомой функции от предыстории по времени и от сдвигов по пространству [12, 63, 68]. При этом основное внимание уделялось исследованию общих неявных схем и условиям устойчивости. Хотя общие подходы этой группы и подходы, излагаемые в данной книге, близки, имеются и существенные различия.

В нашем подходе основным моментом в построении сеточных методов является идея разделения конечномерной и бесконечномерной составляющей в предыстории искомой функции (разделение настоящего и прошлого). По конечномерной составляющей строятся аналогии известных для объектов без на-

следственности сеточных методов, а для учета эффекта наследственности применяется интерполяция дискретной предыстории с заданными свойствами. Так как в книге рассматриваются в основном методы невысокого порядка, то, как правило, достаточно кусочно-линейной интерполяции. Другая идея состоит в применении экстраполяции продолжением интерполяции дискретной предыстории. Такая экстраполяция необходима для реализации неявных методов, а кроме того, это позволяет избегать решения многомерных нелинейных систем при реализации сеточных алгоритмов на каждом временном слое. В совокупности эти идеи позволили создать простые и в то же время эффективные алгоритмы, которые положены в основу комплекса программ, предназначенного для численного решения уравнений в частных производных второго порядка параболического и гиперболического типов, а также в частных производных первого порядка, с эффектом запаздывания общего (функционального) вида.

Получающиеся разностные схемы являются нелинейными, осложненными эффектом наследственности. Поэтому традиционные методы общей теории разностных схем [33] напрямую неприменимы. Основным инструментом исследования порядков сходимости сконструированных алгоритмов является общая схема численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений. Ранее вариант этой схемы, использующей технику работы [87], применялся для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений с функциональным запаздыванием [15, 22]. В рамках этой общей схемы для определения порядков глобальной сходимости алгоритмов, кроме порядков локальной погрешности (невязки) и порядков интерполяции, необходимо также определение условий устойчивости схемы, которая определяется спектральными свойствами оператора послойного перехода и может быть исследована методами, развитыми в общей теории разностных схем [33].

Для простоты рассматриваются лишь уравнения с постоян-

ными коэффициентами, хотя все результаты переносятся и на случай переменных коэффициентов.

Отметим, что эффект наследования, рассматриваемый в этой книге и во всех вышеупомянутых работах, содержится в неоднородности или в нелинейных слагаемых в линейных уравнениях. Имеются работы по исследованию других способов вхождения запаздывания в задачи, в том числе и по разработке численных методов, например, для уравнений с запаздыванием в однородной части уравнений [50, 56, 57, 83, 97, 98], кроме того, рассматривают и запаздывание в граничных условиях [8]. Однако численные алгоритмы для этих типов уравнений еще слабо разработаны и в этой книге не затрагиваются.

Коротко о структуре книги. Сначала излагается в абстрактном виде общая схема численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений, теорема о порядке сходимости в которой является теоретической основой исследования всех описываемых ниже алгоритмов решения различных задач. Затем последовательно изучаются простейшие сеточные методы начально-краевой задачи для одномерных уравнений параболического типа с эффектом наследственности, для уравнений параболического типа с эффектом наследственности с двумя пространственными переменными, для уравнений гиперболического типа с эффектом наследственности с одной пространственной переменной. Далее изучаются сеточные методы для уравнения переноса с наследственностью. Уравнения переноса с наследственностью, также, возможно, осложненные зависимостью от пространственной координаты, являются популярными моделями в биологии и медицине [45, 52, 58, 70, 71, 73, 74, 81]. Аналог метода характеристик сводит решение уравнений переноса с наследственностью к смешанным функционально-дифференциальным уравнениям — уравнениям, в которых есть динамика по одной из независимых переменных и функциональная зависимость по другим независимым переменным [20]. В последней главе рассматрива-

ются численные алгоритмы (как одношаговые, так и многошаговые) решения таких уравнений. Во всех этих задачах после описания алгоритмов проводится исследование порядков сходимости путем вложения в общую схему численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений. Отметим, что каждый описанный алгоритм был протестирован на большом количестве примеров как тестового, так и модельного характера, из них небольшая часть вошла в книгу.

В получении результатов, и особенно в тестировании алгоритмов, принимали участие мои ученики, сотрудники кафедры вычислительной математики УрФУ Л. С. Волканин, А. В. Лекомцев, А. Б. Ложников, М. А. Паначев, С. В. Свиридов, С. И. Солодушкин, Е. Е. Таширова. Приношу им глубокую благодарность, все они фактически являются соавторами этой книги. Материалы данной книги составляют часть читаемого автором спецкурса «Функционально-дифференциальные уравнения: численные методы», и поэтому книга представляет собой нечто среднее между монографией и учебным пособием.

Исследования поддержаны Программой повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.) и грантом РФФИ 13-01-00089.

2. Общая дискретная схема с эффектом наследственности

В этой главе рассматривается общая дискретная схема с эффектом наследственности, в которую затем в следующих главах вкладываются сеточные методы решения различных типов уравнений в частных производных с функциональным запаздыванием. Приводимые результаты модифицируют аналогичную схему, которая применялась для исследования порядков сходимости численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений с эффектом запаздывания [15, 22]. Конструкции схемы восходят к работе [87], см. также [41], однако, во-первых, в схему введен промежуточный элемент, названный оператором интерполяции для учета функциональных запаздываний, во-вторых, эффект запаздывания потребовал в доказательство основного результата (теоремы о порядке сходимости) внести существенные изменения, восходящие к работе [14].

Пусть задан отрезок $[t_0, \theta]$ и число $\tau > 0$ – величина запаздывания.

Шагом сетки назовем число $\Delta > 0$, такое, что $\tau/\Delta = m$ – целое, $\{\Delta\}$ – множество шагов.

Сеткой (равномерной) назовем конечный набор чисел

$$\Sigma_{\Delta} = \{t_i = t_0 + i\Delta \in [t_0 - \tau, \theta], \quad i = -m, \dots, M\}.$$

Обозначим $\Sigma_{\Delta}^{-} = \{t_i \in \Sigma_{\Delta}, i \leq 0\}$, $\Sigma_{\Delta}^{+} = \{t_i \in \Sigma_{\Delta}, i \geq 0\}$.

Дискретной моделью назовем всякую сеточную функцию $t_i \in \Sigma_{\Delta} \rightarrow y(t_i) = y_i \in Y$, $i = -m, \dots, M$, где Y – q -мерное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$. Будем предполагать, что размерность q пространства Y зависит от числа $h > 0$.

Для $n \geq 0$ предысторией дискретной модели к моменту t_n назовем множество $\{y_i\}_n = \{y_i \in Y, \quad i = n - m, \dots, n\}$.

Пусть V – линейное нормированное пространство с нормой $\| \cdot \|_V$ (интерполяционное пространство).

Оператором интерполяции дискретной предыстории модели назовем отображение $I: I(\{y_i\}_n) = v \in V$.

Будем говорить, что оператор интерполяции удовлетворяет условию липшицевости, если найдется такая константа L_I , что для всех предыстории дискретной модели $\{y_i^1\}_n$ и $\{y_i^2\}_n$ выполняется

$$\|v^1 - v^2\|_V \leq L_I \max_{n-m \leq i \leq n} \|y_i^1 - y_i^2\|_Y. \quad (2.1)$$

Стартовыми значениями модели назовем функцию $\Sigma_\Delta^- \rightarrow Y$:

$$y(t_i) = y_i, \quad i = -m, \dots, 0. \quad (2.2)$$

Формулой продвижения модели на шаг назовем алгоритм

$$y_{n+1} = S u_n + \Delta \Phi(t_n, I(\{y_i\}_n), \Delta), \quad (2.3)$$

где функция продвижения на шаг $\Phi: \Sigma_\Delta^+ \times V \times \{\Delta\} \rightarrow Y$, оператор перехода $S: Y \rightarrow Y$ – линейный оператор.

Таким образом, дискретная модель (численный метод, в дальнейшем просто метод) определяется стартовыми значениями (2.2), формулой продвижения на шаг (2.3) и оператором интерполяции.

Будем предполагать, что функция $\Phi(t_n, v, \Delta)$ в (2.3) липшицева по второму аргументу, т. е. найдется такая константа L_Φ , что для всех $t_n \in \Sigma_\Delta^+$, $\Delta \in \{\Delta\}$, $v^1, v^2 \in V_n$ выполняется

$$\|\Phi(t_n, v^1, \Delta) - \Phi(t_n, v^2, \Delta)\|_Y \leq L_\Phi \|v^1 - v^2\|_V. \quad (2.4)$$

Функцией точных значений назовем отображение:

$$Z(t_i, \Delta) = z_i \in Y, \quad i = -m, \dots, M. \quad (2.5)$$

Будем говорить, что стартовые значения модели имеют порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, если найдется константа C , такая, что

$$\|z_i - y_i\|_Y \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2}), \quad i = -m, \dots, 0.$$

Будем говорить, что метод сходится с порядком $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, если существует константа C , такая, что

$$\| z_n - y_n \|_Y \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2})$$

для всех $n = -m, \dots, M$.

Индексы у норм в дальнейшем будем опускать.

Назовем метод (2.3) устойчивым, если

$$\| S \| \leq 1.$$

Погрешностью аппроксимации (невязкой) с интерполяцией назовем сеточную функцию

$$d_n = (z_{n+1} - S z_n) / \Delta - \Phi(t_n, I(\{z_i\}_n), \Delta), \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (2.6)$$

Будем говорить, что метод (2.3) имеет порядок погрешности аппроксимации с интерполяцией $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, если существует константа C , такая, что

$$\| d_n \| \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2})$$

для всех $n = 1, \dots, M$.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 1. Пусть метод (2.3) устойчив, функция Φ удовлетворяет условию липшицевости по второму аргументу, оператор интерполирования I удовлетворяет условию липшицевости, стартовые значения имеют порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, погрешность аппроксимации с интерполяцией имеет порядок $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$, где $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0$, тогда метод сходится, причем порядок сходимости не меньше $\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}$.

Доказательство. Обозначим $\delta_n = z_n - y_n$, $n = -m, \dots, M$, тогда для $n = 0, \dots, M-1$ имеем

$$\delta_{n+1} = S\delta_n + \Delta\hat{\delta}_n + \Delta d_n, \quad (2.7)$$

где

$$\hat{\delta}_n = \Phi(t_n, I(\{z_i\}_n), \Delta) - \Phi(t_n, I(\{y_i\}_n), \Delta).$$

Из предположений о липшицевости отображений Φ и I следует

$$\|\hat{\delta}_n\| \leq K \max_{n-m \leq i \leq n} \{\|\delta_i\|\}, \quad (2.8)$$

где $K = L_\Phi L_I$.

Из (2.7) вытекает

$$\delta_{n+1} = S^{n+1}\delta_0 + \Delta \sum_{j=0}^n S^{n-j}\hat{\delta}_j + \Delta \sum_{j=0}^n S^{n-j}d_j. \quad (2.9)$$

Из (2.9), (2.8) и определения устойчивости оператора S следует

$$\|\delta_{n+1}\| \leq K\Delta \sum_{j=0}^n \max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} + \|\delta_0\| + (\theta - t_0) \max_{0 \leq i \leq N-1} \{\|d_i\|\}. \quad (2.10)$$

Обозначим

$$R_0 = \max_{-m \leq i \leq 0} \{\|\delta_i\|\}, \quad R = \max_{0 \leq i \leq N-1} \{\|d_i\|\}, \quad D = R_0 + (\theta - t_0)R, \quad (2.11)$$

тогда оценку (2.10) можно переписать как

$$\|\delta_{n+1}\| \leq K\Delta \sum_{j=0}^n \max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} + D. \quad (2.12)$$

Индукцией по $n = 1, \dots, M$ докажем оценку

$$\|\delta_n\| \leq D(1 + K\Delta)^n. \quad (2.13)$$

База индукции. Если в (2.12) положить $n = 0$, то

$$\|\delta_1\| \leq K\|\delta_0\| + D \leq (1 + K\Delta)D.$$

Шаг индукции. Пусть оценка (2.13) верна для всех индексов от 1 до n . Покажем, что оценка справедлива и для $n + 1$. Зафиксируем $j \leq n$. Пусть $i_0 = i_0(j)$ — тот индекс, на котором достигается

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\}.$$

Возможны две ситуации:

а) $i_0 \leq 0$, тогда

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} = \|\delta_{i_0}\| \leq R_0 \leq D(1 + K\Delta)^j;$$

б) $1 \leq i_0 \leq j$, тогда по индуктивному предположению

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} = \|\delta_{i_0}\| \leq D(1 + K\Delta)^{i_0} \leq D(1 + K\Delta)^j.$$

Таким образом, в любом случае выполняется оценка

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} \leq D(1 + K\Delta)^j.$$

Из полученной оценки и (2.12) вытекает

$$\|\delta_{n+1}\| \leq K\Delta \sum_{j=0}^n D(1 + K\Delta)^j + D = D(1 + K\Delta)^{n+1}.$$

Таким образом, оценка (2.13) доказана и из нее получаем оценку

$$\|\delta_n\| \leq D \exp(K(\theta - t_0)). \quad (2.14)$$

Так как по определению (2.11) величины D выполняется

$$D \leq C(\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}),$$

то из (2.14) вытекает заключение теоремы.

3. Численные методы решения одномерного уравнения теплопроводности с наследственностью. Результаты получены совместно с А. Б. Ложниковым

В этой главе сконструировано семейство сеточных методов для численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием общего вида на основе идеи разделения текущего состояния и функции-предыстории. Получена теорема о порядке сходимости методов с использованием методики доказательств аналогичных утверждений для функционально-дифференциальных уравнений и методики общей теории разностных схем. Приводятся результаты расчетов тестовых примеров с постоянным и переменным запаздыванием.

3.1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим уравнение теплопроводности с эффектом последствия вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (3.1)$$

здесь $x \in [0, X]$ — пространственная и $t \in [t_0, \theta]$ — временная независимые переменные; $u(x, t)$ — искомая функция; $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t ; τ — величина запаздывания.

Пусть заданы начальные условия

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad x \in [0, X], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (3.2)$$

и граничные условия

$$u(0, t) = g_0(t), \quad u(X, t) = g_1(t), \quad t \in [t_0, \theta]. \quad (3.3)$$

Задача (3.1)–(3.3) представляет собой простейшую краевую задачу для уравнения теплопроводности с эффектом запаздывания общего вида. Будем предполагать, что функции φ , g_0 , g_1 и функционал f таковы, что эта задача имеет единственное решение $u(x, t)$, понимаемое в классическом смысле. Отметим, что вопросы существования и единственности подобных задач рассматривались в [99].

Обозначим через $Q = Q[-\tau, 0)$ множество функций $u(s)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа. Определим норму функций на Q соотношением

$$\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{s \in [-\tau, 0)} |u(s)|.$$

Дополнительно будем предполагать, что функционал $f(x, t, u, v(\cdot))$ определен на $[0, X] \times [t_0, \theta] \times R \times Q$ и липшицев по двум последним аргументам, т. е. найдется такая константа L_f , что для всех $x \in [0, X]$, $t \in [t_0, \theta]$, $u^1 \in R$, $u^2 \in R$, $v^1(\cdot) \in Q$, $v^2(\cdot) \in Q$ выполняется

$$|f(x, t, u^1, v^1(\cdot)) - f(x, t, u^2, v^2(\cdot))| \leq L_f(|u^1 - u^2| + \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q).$$

3.2. Сеточные схемы с весом

Разобьем отрезок изменения пространственной переменной $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, введя точки $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, и разобьем отрезок изменения временной переменной $[t_0, \theta]$ на части с шагом $\Delta > 0$, введя точки $t_j = t_0 + j\Delta$, $j = 0, \dots, M$. Будем считать, что величина $\tau/\Delta = m$ – целое число.

Приближения функций $u(x_i, t_j)$ в узлах будем обозначать через u_j^i . При всяком фиксированном $i = 0, \dots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j , $j = 0, \dots, M : \{u_k^i\}_j = \{u^{i,k}, j-m \leq k \leq j\}$. Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение $I : \{u_k^i\}_j \rightarrow v_j^i(\cdot) \in Q[t_j - \tau, t_j + \Delta]$.

Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности p на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 , такие, что для всех i, j и $t \in [t_j - \tau, t_{j+1}]$ выполняется неравенство

$$|v_j^i(t) - u(x_i, t)| \leq C_1 \max_{j-m \leq k \leq j} |u_k^i - u(x_i, t_k)| + C_2 \Delta^p. \quad (3.4)$$

Например, кусочно-постоянная интерполяция имеет первый порядок, а кусочно-линейная интерполяция

$$v_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta} ((t_k - t_j - s)u_{k-1}^i + (t_j + s - t_{k-1})u_k^i), \quad t_{k-1} \leq t_j + s \leq t_k,$$

с экстраполяцией продолжением

$$v_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta} ((-s)u_{j-1}^i + (\Delta + s)u_j^i), \quad t_j \leq t_j + s \leq t_{j+1},$$

имеет второй порядок [15].

Будем предполагать, что, во-первых, оператор интерполяции-экстраполяции липшицев, т. е. найдется такая константа L_I , что для всех предысторий дискретной модели $\{u_k^i\}_j$ и $\{y_k^i\}_j$ выполняется

$$\sup_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |v_j^i(t) - w_j^i(t)| \leq L_I \max_{j-m \leq k \leq j} |u_k^i - y_k^i|,$$

где $v_j^i(\cdot) = I(\{u_k^i\}_j)$, $w_j^i(\cdot) = I(\{y_k^i\}_j)$.

Во-вторых, будем предполагать, что оператор интерполяции-экстраполяции согласован, т. е.

$$v_j^i(t_k) = u_k^i, \quad k = j - m, \dots, j.$$

Для $0 \leq s \leq 1$ рассмотрим семейство методов

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} &= sa^2 \frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + (1-s)a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} + \\ &+ F_j^i(v_j^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

с начальными условиями

$$u_0^i = \varphi(x_i, t_0), \quad i = 0, \dots, N,$$

$$v_j^i(t) = \varphi(x_i, t), \quad t < t_0, \quad i = 0, \dots, N$$

и граничными условиями

$$u_j^0 = g_0(t_j), \quad u_j^N = g_1(t_j), \quad j = 0, \dots, M.$$

Здесь $F_j^i(v(\cdot))$ — некоторый функционал, определенный на $Q[-\tau, \Delta]$ и связанный с функционалом $f(x_i, t_j, u, v(\cdot))$, липшицевый по переменной $v(\cdot)$ с константой L_F .

При $s = 0$ получается явная схема, при других s , $0 < s \leq 1$, при каждом фиксированном j система (3.5) представляет собой линейную трехдиагональную систему относительно u_{j+1}^i с диагональным преобладанием, которая может быть эффективно решена методом прогонки.

Невязкой метода назовем

$$\begin{aligned} \Psi_j^i &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - \\ &- sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1})}{h^2} - \\ &- (1-s)a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} - F_j^i(u_{t_j}(x_i, (\cdot))). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Определение порядка невязки метода при конкретном выборе s и F проводится с помощью тейлоровского разложения функции $u(x, t)$ и функционала F (при условиях соответствующей гладкости). Так, например, справедливо следующее утверждение, полностью соответствующее аналогичному утверждению без запаздывания для схемы повышенного порядка точности [33].

Теорема 2. Если для точного решения задачи (3.5) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 6-го порядка включительно, функционал $f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot))$ при фиксированных $t, u, u_t(x, \cdot)$ четырежды непрерывно дифференцируем по x ,

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\sigma}, \quad F_j^i = \frac{5}{6}f_{j+\frac{1}{2}}^i + \frac{1}{12}(f_{j+\frac{1}{2}}^{i-1} + f_{j+\frac{1}{2}}^{i+1}), \quad (3.7)$$

то невязка имеет порядок $h^4 + \Delta^2$.

Здесь $\sigma = \frac{a^2\Delta}{h^2}$, $f_j^i = f(x_i, t_j, u_j^i, v_{t_j}^i(\cdot))$.

Доказательство. Для значений функции $u(x, t)$, входящих в определение невязки, имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{j+1}) &= u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \Delta^2 + O(\Delta^3), \\ u(x_i, t_j) &= u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \Delta^2 + O(\Delta^3), \\ u(x_{i+1}, t_{j+1}) &= u(x_i, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j+1})h^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+1})h^4 + \frac{1}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i, t_{j+1})h^5 + O(h^6), \\ u(x_{i-1}, t_{j+1}) &= u(x_i, t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 - \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j+1})h^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+1})h^4 - \frac{1}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i, t_{j+1})h^5 + O(h^6), \\ u(x_{i+1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)h^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) h^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) h^4 + \frac{1}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i, t_j) h^5 + O(h^6), \\
& u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) h^2 - \\
& - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) h^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) h^4 - \frac{1}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i, t_j) h^5 + O(h^6),
\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\Psi_j^i &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta^2) - \\
& - s a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) - \frac{s a^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+1}) h^2 + O(h^4) - \\
& - (1-s) a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{(1-s) a^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) h^2 - F_j^i(u_{t_j}(x_i, (\cdot))).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Учитывая разложения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta^2), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta^2), \\
\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+1}) &= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta}{2} \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta^2), \\
\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) &= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta}{2} \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta^2),
\end{aligned}$$

а также то, что $u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$ является решением задачи (3.1), из (3.8) получаем

$$\begin{aligned}
\Psi_j^i &= -(2s-1) a^2 \Delta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \right) - \\
& - \frac{a^2 h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + f^i - F + O(\Delta^2) + O(h^4),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} f^i &= f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), u_{t_{j+\frac{1}{2}}}(x_i, \cdot)), \\ F &= F_j^i(u_{t_j}(x_i, (\cdot))) = \frac{5}{6}f^i + \frac{1}{12}(f^{i-1} + f^{i+1}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как по условию теоремы

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\sigma}, \quad \sigma = \frac{a^2\Delta}{h^2},$$

то выражение перед квадратными скобками в (3.9) преобразуется

$$-(2s - 1)a^2\Delta = \frac{a^2\Delta}{6\sigma} = \frac{h^2}{6}$$

и соотношение (3.9) перепишется

$$\begin{aligned} \Psi_j^i &= \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{a^2 h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \\ &+ f^i - F + O(\Delta^2) + O(h^4). \end{aligned} \quad (3.11)$$

При фиксированных $t = t_{j+\frac{1}{2}}$, $u = u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$ и предыстории $u_{t_{j+\frac{1}{2}}}(x_i, \cdot)$ продифференцируем дважды по x уравнение (3.1), получим

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + f'',$$

где $f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), u_{t_{j+\frac{1}{2}}}(x_i, \cdot))$, таким образом,

$$\Psi_j^i = \frac{h^2}{12} f'' + f^i - F + O(\Delta^2) + O(h^4). \quad (3.12)$$

Учитывая, что

$$f'' = \frac{f^{i-1} - 2f^i + f^{i+1}}{h^2} + O(h^2),$$

из (3.12) и (3.10) получаем

$$\Psi_j^i = O(\Delta^2) + O(h^4).$$

Обозначим величину погрешности метода в узлах через $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$. Будем говорить, что метод сходится, если $\varepsilon_j^i \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и $\Delta \rightarrow 0$ для всех $i = 0, \dots, N$ и $j = 0, \dots, M$. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если найдется такая константа C , что выполняется $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \dots, N$ и $j = 0, \dots, M$.

В силу нелинейного характера зависимости функционала f (а следовательно, и F) от состояния и его предыстории обычные методы исследования порядков сходимости [33] неприменимы. Однако к данной задаче, как и к другим эволюционным задачам с эффектом запаздывания, для исследования порядков сходимости схем применим аппарат абстрактных разностных схем с последствием, ранее разработанный в [15, 22] для случая обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений и изложенный в предыдущей главе данной книги применительно к уравнениям в частных производных.

3.3. Вложение схемы с весом в общую разностную схему с последствием

Проведем вложение схем семейства (3.5) в общую разностную схему с последствием. В этом разделе будем рассматривать задачи с однородными краевыми условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(X, t) = 0, \quad t \in [t_0, \theta].$$

К такой задаче можно свести исходную задачу (3.1)–(3.3) с помощью замены

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t) - g_0(t) \frac{X - x}{X} - g_1(t) \frac{x}{X}.$$

При каждом $t_j \in \Sigma_\Delta$ определим значения дискретной модели вектором $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1})' \in Y$, здесь Y — векторное

пространство размерности $q = N - 1$, $'$ — знак транспонирования.

В пространстве Y введем оператор A :

$$Au_j^i = -a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2},$$

тогда систему (3.5) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + sAy_{j+1} + (1 - s)Ay_j = F_j(v(\cdot)), \quad (3.13)$$

где $F_j(v(\cdot)) = (F_j^1(v^1(\cdot)), F_j^2(v^2(\cdot)), \dots, F_j^{N-1}(v^{N-1}(\cdot)))'$, $v(\cdot) = I(\{y_k\}_j) \in Q^q[-\tau, \Delta]$. Здесь $V = Q^q[-\tau, \Delta]$ — интерполяционное пространство, пространство q -мерных вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит пространству $Q[-\tau, \Delta]$.

Воспользовавшись тождеством

$$y_{j+1} = y_j + \Delta \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta}$$

и вводя оператор

$$B = E + \Delta sA$$

(E — тождественный оператор), приведем уравнение (3.13) к каноническому виду [33]:

$$B \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + Ay_j = F_j(v(\cdot)). \quad (3.14)$$

Так как при любом допустимом весе s уравнение (3.14) разрешимо относительно y_{j+1} (существует B^{-1}), то можно привести уравнение (3.14) к явной форме

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta \Phi(t_j, I(\{y_k\}_j), \Delta), \quad (3.15)$$

где оператор перехода определяется формулой

$$S = E - \Delta B^{-1}A,$$

функция продвижения на шаг формулой

$$\Phi(t_j, v, \Delta) = B^{-1}F_j(v(\cdot)).$$

Исследуем устойчивость полученной схемы. Для этого наряду с уравнениями (3.14), (3.15) рассмотрим однородную разностную схему в канонической и явной формах

$$B \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + Ay_j = 0, \quad (3.16)$$

$$y_{j+1} = Sy_j. \quad (3.17)$$

Оператор A самосопряженный и положительный [33] в смысле скалярного произведения векторов $y = (y^1, y^2, \dots, y^{N-1})' \in Y$, $u = (u^1, u^2, \dots, u^{N-1})' \in Y$:

$$(y, u) = \sum_{i=1}^{N-1} y^i u^i h.$$

Введем в пространстве Y энергетическую норму

$$\|y\|_Y = \sqrt{(Ay, y)}.$$

Как показано в [33], если выполняется соотношение

$$s \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sigma}, \quad (3.18)$$

для решения уравнения (3.16) выполняется оценка

$$\|y_{j+1}\|_Y \leq \|y_j\|_Y,$$

т. е. для эквивалентного уравнения (3.17) выполняется

$$\|S\| \leq 1,$$

таким образом, при условии (3.18) схема устойчива. Этот результат усиливает ранее полученное в [26] прямой оценкой решения системы с трехдиагональной матрицей для погрешности метода достаточное условие устойчивости

$$s \geq 1 - \frac{1}{2\sigma}. \quad (3.19)$$

Определим функцию точных значений соотношениями

$$z_j = (u(x_1, t_j), u(x_2, t_j), \dots, u(x_{N-1}, t_j))' \in Y.$$

Стартовые значения модели можно взять равные функции точных значений:

$$y_j = z_j = (\varphi(x_1, t_j), \varphi(x_2, t_j), \dots, \varphi(x_{N-1}, t_j))', \quad j = -m, \dots, 0.$$

Определения невязки без интерполяции (3.6) в схеме с весами для уравнения теплопроводности и невязки с интерполяцией (2.6) в общей схеме существенно отличаются. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть невязка метода в смысле (3.6) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_j^i липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I имеет порядок погрешности p_0 на точном решении, тогда невязка с интерполяцией в смысле (2.6) имеет порядок $\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h^{p_2}$.

Доказательство. Введем вектор невязки без интерполяции (3.6)

$$\psi_j = (\Psi_j^1, \Psi_j^2, \dots, \Psi_j^{N-1})',$$

который определяется соотношением

$$\psi_j = \frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta} + sAz_{j+1} + (1-s)zy_j - F_j(z_{t_j}(\cdot)), \quad (3.20)$$

где $z_{t_j}(\cdot)$ – векторная предыстория точного решения. Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{z_{j+1} - Sz_j}{\Delta} = B^{-1}(F_j(z_{t_j}(\cdot)) + \psi_j). \quad (3.21)$$

Невязка с интерполяцией (2.6) перепишется для данного метода в виде

$$d_n = \frac{z_{j+1} - Sz_j}{\Delta} - B^{-1}F_j(I(\{z_k\}_j)), \quad (3.22)$$

таким образом, имеем соотношения между невязкой с интерполяцией и невязкой без интерполяции

$$d_n = B^{-1}\psi_j + B^{-1}F_j(z_{t_j}(\cdot)) - B^{-1}F_j(I(\{z_k\}_j)). \quad (3.23)$$

Из этого соотношения, а также липшицевости функции F_j и определения (3.4) порядка погрешности оператора I вытекает заключение теоремы.

Вложение схемы с весами для уравнения теплопроводности в общую схему проведено, и из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполняется условие устойчивости (3.18), невязка (3.6) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_j^i липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I имеет порядок погрешности p_0 на точном решении, тогда метод сходится с порядком $\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h^{p_2}$.

В частности, метод (3.7) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок сходимости $h^4 + \Delta^2$.

3.4. Примеры численных расчетов

Пример 1. Тестовый пример. Рассмотрим следующее уравнение с постоянным запаздыванием по переменной t :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + (2 - e^{-\tau}) e^t \sin x + u(x, t - \tau), \quad (3.24)$$

при $\tau = 1$ с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, s) = e^s \sin x, \quad -\tau \leq s \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 4,$$

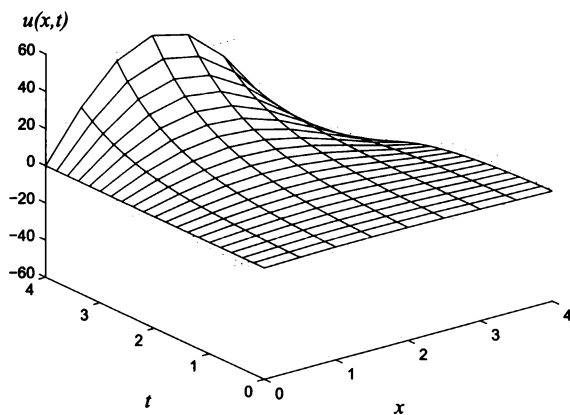


Рис. 1. Приближенное решение уравнения (3.24), полученное методом сеток с весами, с числом точек разбиения по x равным 8 и по t равным 20

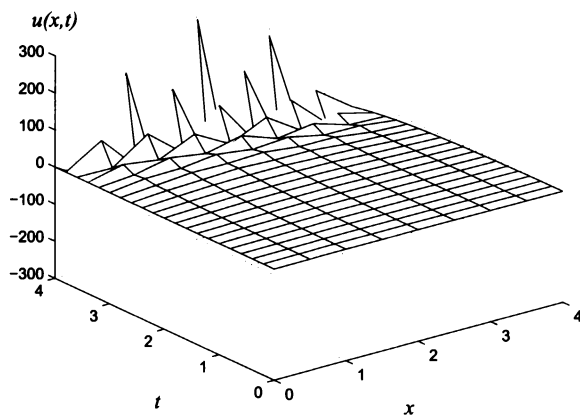


Рис. 2. Приближенное решение уравнения (3.24), полученное методом прямых в комбинации с методом Эйлера, с числом точек разбиения по x равным 8 и по t равным 20

$$u(0, t) = 0, \quad u(4, t) = e^t \sin 4, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

Это уравнение имеет точное решение $u(x, t) = e^t \sin x$. На рис. 1 приводится приближенное решение этого уравнения методом сеток с весами (3.5), (3.7), а в таб. 1 приводится сравнение норм разности матриц точного и приближенного решений этого метода с методом прямых [26] при разных шагах h и Δ . Метод прямых состоит в том, что с помощью отношения конечных разностей аппроксимируется только $\partial^2 u / \partial x^2$, а производная $\partial u / \partial t$ сохраняется в дифференциальной форме. Таким образом, решение отыскивается вдоль прямых $x = \text{const}$ из системы функционально-дифференциальных уравнений с независимой переменной t . В данном примере система функционально-дифференциальных уравнений решалась методом Эйлера. Нормы разности вычислялись по формуле

$$\|U\| = \max_{0 \leq j \leq M} \sum_{i=0}^N |u(x_i, t_j) - u_j^i|. \quad (3.25)$$

При реализации метода сеток для вычисления величин F_j^i в разностной схеме использовалась кусочно-линейная интерполяция между узлами сетки и экстраполяция продолжением.

Таблица 1. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (3.24) для метода сеток с весами и метода прямых при разных шагах

Кол-во разбиений	Метод сеток	Метод прямых
$N = 8, M = 20$	0.75025	1237.4947
$N = 8, M = 40$	0.15591	4.8863
$N = 8, M = 100$	0.010764	0.063088
$N = 8, M = 200$	0.034583	1.7225
$N = 20, M = 200$	0.017284	2.7285

Рассмотренный пример показывает, что метод с весами для данного примера дает лучшую точность результатов, а также

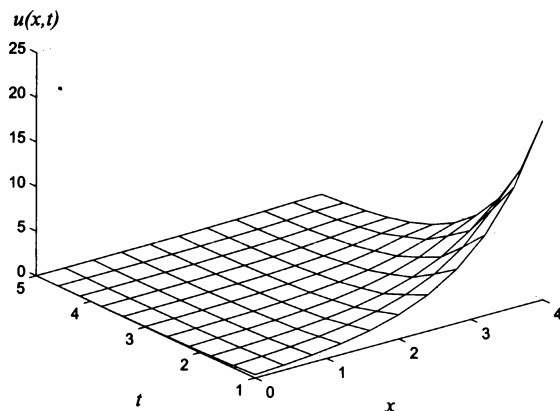


Рис. 3. Приближенное решение уравнения (3.26), полученное методом сеток с весами, с числом точек разбиения по x равным 10 и по t равным 10

то, что он является более устойчивым в сравнении с методом прямых, который демонстрирует расходимость при определенных соотношениях шагов разбиений по x и по t (см. рис. 2).

Пример 2. Рассмотрим тестовое уравнение с переменным запаздыванием

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - (a^2 + 1) e^x \left(\frac{u(x, t)}{u(x, t - \frac{t}{2})} \right)^2 \quad (3.26)$$

при $a = 0.2$ с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, s) = e^{x-s}, \quad 0.5 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 4,$$

$$u(0, t) = e^{-t}, \quad u(4, t) = e^{4-t}, \quad 1 \leq t \leq 5.$$

Это уравнение имеет точное решение $u(x, t) = e^{x-t}$. На рис. 3 приводится приближенное решение этого уравнения ме-

тодом (3.5), (3.7). При реализации метода сеток для вычисления величин F_j^i в разностной схеме использовалась кусочно-линейная интерполяция между узлами сетки и экстраполяция продолжением. В табл. 2 приводятся построчные нормы (3.25) разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (3.26) при разных шагах h и Δ .

Таблица 2. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (3.26) для метода сеток с весами при разных шагах

	$N = 10$	$N = 10$	$N = 10$	$N = 20$	$N = 50$
	$M = 10$	$M = 50$	$M = 100$	$M = 10$	$M = 10$
$ U $	2.2052	0.054559	0.013301	4.72	12.1234

4. Метод переменных направлений для решения двумерного уравнения параболического типа с наследственностью. Результаты получены совместно с А. В. Лекомцевым

В этой главе рассматриваются уравнения параболического типа с двумя пространственными переменными и с эффектами запаздываний по временной составляющей. Конструируется схема переменных направлений для численного решения этих уравнений. Рассматривается вопрос о сведении задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями. Исследуется порядок погрешности аппроксимации для схемы переменных направлений, устойчивость и порядок сходимости. Приводятся результаты численных экспериментов.

4.1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим уравнение теплопроводности с эффектом запаздывания вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y, \cdot)), \quad (4.1)$$

здесь $x \in [0, X]$, $y \in [0, Y]$ — пространственные и $t \in [t_0, \theta]$ — временная независимые переменные; $u(x, y, t)$ — искомая функция; $u_t(x, y, \cdot) = \{u(x, y, t + s), -\tau \leq s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t ; τ — величина запаздывания.

Пусть заданы начальные условия

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y, t), \quad x \in [0, X], \quad y \in [0, Y], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0] \quad (4.2)$$

и граничные условия

$$u(0, y, t) = g_0(y, t), \quad u(X, y, t) = g_1(y, t), \quad y \in [0, Y], \quad t \in [t_0, \theta], \quad (4.3)$$

$$u(x, 0, t) = g_2(x, t), \quad u(x, Y, t) = g_3(x, t), \quad x \in [0, X], \quad t \in [t_0, \theta]. \quad (4.4)$$

Задача (4.1)–(4.4) представляет собой простейшую краевую задачу для уравнения теплопроводности с эффектом запаздывания общего вида. Будем предполагать, что функции φ , g_0 , g_1 , g_2 , g_3 и функционал f таковы, что эта задача имеет единственное решение $u(x, y, t)$, понимаемое в классическом смысле, причем функция $u(x, y, t)$ обладает требуемой в нижеприведенных рассуждениях гладкостью. Отметим, что вопросы существования и единственности подобных задач рассматривались в [99].

Обозначим через $Q = Q[-\tau, 0]$ множество функций $u(s)$, кусочно-непрерывных на полуинтервале $[-\tau, 0]$, с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, также функции $u(s)$ имеют конечный левый предел в нуле. Определим норму функции на Q соотношением $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{-\tau \leq s < 0} \|u(s)\|$. Дополнительно будем предполагать, что функционал $f(x, y, t, u, v)$ определен на $[0, X] \times [0, Y] \times [t_0, \theta] \times R \times Q$ и липшицев по двум последним аргументам, т. е. найдется такая константа L_f , что для всех $x \in [0, X]$, $y \in [0, Y]$, $t \in [t_0, \theta]$, $u^1 \in R$, $u^2 \in R$, $v^1(\cdot) \in Q$, $v^2(\cdot) \in Q$ выполняется

$$\begin{aligned} & |f(x, y, t, u^1, v^1(\cdot)) - f(x, y, t, u^2, v^2(\cdot))| \leq \\ & \leq L_f(|u^1 - u^2| + \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Сведем рассматриваемую задачу (4.1)–(4.4) к однородным граничным условиям. Для этого рассмотрим следующую замену:

$$\begin{aligned} w = u - [g_0(y, t) + \frac{g_1(y, t) - g_0(y, t)}{X}x] - \\ - [g_2(x, t) + \frac{g_3(x, t) - g_2(x, t)}{Y}y] + \frac{X - x}{X} \frac{Y - y}{Y} g_0(0, t) + \end{aligned}$$

$$+\frac{X-x}{X}\frac{y}{Y}g_0(Y,t)+\frac{x}{X}\frac{y}{Y}g_1(Y,t)+\frac{x}{X}\frac{Y-y}{Y}g_1(0,t).$$

Используя условие согласованности граничных условий, получаем:

$$\begin{aligned} w(0,y,t) &= u(0,y,t) - g_0(y,t) - \frac{Y-y}{Y}g_2(0,t) - \frac{y}{Y}g_3(0,t) + \\ &+ \frac{Y-y}{Y}g_0(0,t) + \frac{y}{Y}g_0(Y,t) = \frac{Y-y}{Y}(g_0(0,t) - g_2(0,t)) + \\ &+ \frac{y}{Y}(g_0(Y,t) - g_3(0,t)) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(X,y,t) &= u(X,y,t) - g_1(y,t) - \frac{Y-y}{Y}g_2(X,t) - \frac{y}{Y}g_3(X,t) + \\ &+ \frac{y}{Y}g_1(Y,t) + \frac{Y-y}{Y}g_1(0,t) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(x,0,t) &= u(x,0,t) - \frac{X-x}{X}g_0(0,t) - \frac{x}{X}g_1(0,t) - g_2(x,t) + \\ &+ \frac{X-x}{X}g_0(0,t) + \frac{x}{X}g_1(0,t) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(x,Y,t) &= u(x,Y,t) - \frac{X-x}{X}g_0(Y,t) - \frac{x}{X}g_1(Y,t) - g_3(x,t) + \\ &+ \frac{X-x}{X}g_0(Y,t) + \frac{x}{X}g_1(Y,t) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в дальнейшем без ограничения общности будем рассматривать следующую краевую задачу с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t,u(x,y,t),u_t(x,y,\cdot)), \quad (4.6)$$

$$u(x,y,t) = \varphi(x,y,t), \quad x \in [0,X], \quad y \in [0,Y], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (4.7)$$

$$u(0,y,t) = u(X,y,t) = 0, \quad y \in [0,Y], \quad t \in [t_0, \theta], \quad (4.8)$$

$$u(x,0,t) = u(x,Y,t) = 0, \quad x \in [0,X], \quad t \in [t_0, \theta]. \quad (4.9)$$

4.2. Метод переменных направлений

Разобьем отрезки изменения пространственных переменных $[0, X]$ и $[0, Y]$ на части с шагами $h_1 = X/N_1$ и $h_2 = Y/N_2$ соответственно, введя точки $x_i = ih_1$, $i = 0, \dots, N_1$, $y_j = jh_2$, $j = 0, \dots, N_2$, и разобьем отрезок изменения временной переменной $[t_0, \theta]$ на части с шагом $\Delta > 0$, введя точки $t_k = t_0 + k\Delta$, $k = 0, \dots, M$. Будем считать, что величина $\tau/\Delta = m$ — целое число. Обозначим через $\bar{\omega}_h$ равномерную по x и y сетку с шагами h_1 и h_2 соответственно. То есть $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih_1, y_j = jh_2 : i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2, (i, j) \neq \{(0, 0); (N_1, 0); (0, N_2); (N_1, N_2)\}\}$. Обозначим через $\omega_h = \{x_i = ih_1, y_j = jh_2 : i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1\}$. Пусть γ_h — граница сеточной области $\bar{\omega}_h$, содержащая все узлы на сторонах прямоугольника, кроме его вершин, $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$.

Приближения функций $u(x_i, y_j, t_k)$ в узлах будем обозначать через $u_k^{i,j}$. При всяких фиксированных $i = 0, \dots, N_1$ и $j = 0, \dots, N_2$ введем дискретную предысторию к моменту t_k , $k = 0, \dots, M$: $\{u_l^{i,j}\}_k = \{u_l^{i,j}, k - m \leq l \leq k\}$. Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение I , ставящее в соответствие всякому моменту t_k ($k = 0, \dots, M$) и дискретной предыстории $\{u_l^{i,j}\}_k$ к моменту t_k функцию $v_k^{i,j}(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$. В дальнейшем индекс k у функции $v_k^{i,j}(\cdot)$ будем опускать.

Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности Δ^p на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 , такие, что для всех i, j, k и $t \in [t_k - \tau, t_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$\|v^{i,j}(t) - u(x_i, y_j, t)\| \leq C_1 \max_{k-m \leq l \leq k} \|u_l^{i,j} - u(x_i, y_j, t_l)\| + C_2 \Delta^p.$$

Например, кусочно-линейная интерполяция

$$v^{i,j}(t_k + s) = ((t_l - t_k - s)u_{l-1}^{i,j} + (t_k + s - t_{l-1})u_l^{i,j})/\Delta,$$

где $t_{l-1} \leq t_k + s \leq t_l$, $l \leq k$, с экстраполяцией продолжением

$$v^{i,j}(t_k + s) = ((-s)u_{k-1}^{i,j} + (\Delta + s)u_k^{i,j})/\Delta, \quad t_k \leq t_k + s \leq t_{k+1},$$

имеет второй порядок [15]. Рассмотрим метод, который по аналогии с подобным методом для двумерного уравнения теплопроводности без запаздывания [33] будем называть методом переменных направлений. Определим $u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}$ и $u_{k+1}^{i,j}$ из решения систем, которые могут быть решены трехдиагональной прогонкой:

$$\begin{aligned} (u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j} - u_k^{i,j})/(\Delta/2) &= \frac{a^2}{h_1^2}(u_{k+\frac{1}{2}}^{i+1,j} - 2u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j} + u_{k+\frac{1}{2}}^{i-1,j}) + \\ &+ \frac{a^2}{h_2^2}(u_k^{i,j+1} - 2u_k^{i,j} + u_k^{i,j-1}) + F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(v^{i,j}(\cdot)), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} (u_{k+1}^{i,j} - u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j})/(\Delta/2) &= \frac{a^2}{h_1^2}(u_{k+\frac{1}{2}}^{i+1,j} - 2u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j} + u_{k+\frac{1}{2}}^{i-1,j}) + \\ &+ \frac{a^2}{h_2^2}(u_{k+1}^{i,j+1} - 2u_{k+1}^{i,j} + u_{k+1}^{i,j-1}) + F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(v^{i,j}(\cdot)), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $i = 1, \dots, N_1 - 1$, $j = 1, \dots, N_2 - 1$, $k = 0, \dots, M - 1$, с начальными и граничными условиями

$$u_0^{i,j} = \varphi(x_i, y_j, t_0), \quad i = 0, \dots, N_1, \quad j = 0, \dots, N_2, \quad (4.12)$$

$$v^{i,j}(t) = \varphi(x_i, y_j, t), \quad t < t_0, \quad i = 0, \dots, N_1, \quad j = 0, \dots, N_2, \quad (4.13)$$

$$u_k^{0,j} = 0, \quad u_k^{N_1,j} = 0, \quad j = 0, \dots, N_2, \quad k = 0, \dots, M, \quad (4.14)$$

$$u_k^{i,0} = 0, \quad u_k^{i,N_2} = 0, \quad i = 0, \dots, N_1, \quad k = 0, \dots, M, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} u_{k+\frac{1}{2}}^{0,j} &= (u_k^{0,j} + u_{k+1}^{0,j})/2 - \Delta\Lambda_2(u_{k+1}^{0,j} - u_k^{0,j})/4, \\ j &= 1, \dots, N_2 - 1, \quad k = 0, \dots, M - 1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$u_{k+\frac{1}{2}}^{N_1,j} = (u_k^{N_1,j} + u_{k+1}^{N_1,j})/2 - \Delta\Lambda_2(u_{k+1}^{N_1,j} - u_k^{N_1,j})/4,$$

$$j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad k = 0, \dots, M - 1, \quad (4.17)$$

через Λ_1 и Λ_2 обозначены: $\Lambda_1 u_k^{i,j} = (u_k^{i+1,j} - 2u_k^{i,j} + u_k^{i-1,j})a^2/h_1^2$,
 $\Lambda_2 u_k^{i,j} = (u_k^{i,j+1} - 2u_k^{i,j} + u_k^{i,j-1})a^2/h_2^2$.

В качестве $F_k^{i,j}(v^{i,j}(\cdot))$ возьмем функционал $f(x_i, y_j, t_k, u_k^{i,j}, v^{i,j}(\cdot))$. Функционал $F_k^{i,j}(v^{i,j}(\cdot))$ определен на $Q[-\tau, \Delta]$ и липшицевый по переменной $v(\cdot)$ с константой L_f .

Перепишем систему (4.10)–(4.11) в операторной форме

$$(u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j} - u_k^{i,j})/(\Delta/2) = \Lambda_1 u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j} + \Lambda_2 u_k^{i,j} + F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(v^{i,j}(\cdot)), \quad (4.18)$$

$$(u_{k+1}^{i,j} - u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j})/(\Delta/2) = \Lambda_1 u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j} + \Lambda_2 u_{k+1}^{i,j} + F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(v^{i,j}(\cdot)), \quad (4.19)$$

где $i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1, k = 0, \dots, M - 1$. Заметим, что значение функционала $F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(v^{i,j}(\cdot))$ вычисляется явно за счет интерполяции и экстраполяции.

Исключим сеточную функцию $u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}$. Для этого преобразуем систему (4.18)–(4.19):

$$(E - \Delta\Lambda_1/2)u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j} = (E + \Delta\Lambda_2/2)u_k^{i,j} + \Delta F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(v^{i,j}(\cdot))/2, \quad (4.20)$$

$$(E - \Delta\Lambda_2/2)u_{k+1}^{i,j} = (E + \Delta\Lambda_1/2)u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j} + \Delta F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(v^{i,j}(\cdot))/2. \quad (4.21)$$

Применим к (4.20) оператор $(E + \Delta\Lambda_1/2)$, а (4.21) — $(E - \Delta\Lambda_1/2)$ и сложим

$$\begin{aligned} & (E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)u_{k+1}^{i,j} = \\ & = (E + \Delta\Lambda_1/2)(E + \Delta\Lambda_2/2)u_k^{i,j} + \Delta F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(v^{i,j}(\cdot)), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & (E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)(u_{k+1}^{i,j} - u_k^{i,j})/\Delta + [(E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2) - \\ & - (E + \Delta\Lambda_1/2)(E + \Delta\Lambda_2/2)]u_k^{i,j}/\Delta = F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(v^{i,j}(\cdot)), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$B \frac{u_{k+1}^{i,j} - u_k^{i,j}}{\Delta} + Au_k^{i,j} = F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(v^{i,j}(\cdot)),$$

$$i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1, k = 0, \dots, M - 1, \quad (4.22)$$

где $B = (E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)$, $A = -\Lambda_1 - \Lambda_2$.

Невязкой метода назовем

$$\Psi_k^{i,j} = B[u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)]/\Delta + Au(x_i, y_j, t_k) -$$

$$-F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(u_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x_i, y_j, (\cdot))). \quad (4.23)$$

Определение порядка невязки метода при конкретном выборе F проводится с помощью тейлоровского разложения функции $u(x, y, t)$ (при условиях соответствующей гладкости). Так, например, справедливо следующее утверждение, полностью соответствующее аналогичному утверждению без запаздывания для метода переменных направлений [33].

Теорема 5. *Невязка метода переменных направлений имеет порядок $\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2$.*

Доказательство. Обозначим $\delta u = u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)$. Подставим оператор B в определение невязки (4.23). Получим

$$(E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)[u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)]/\Delta +$$

$$+ Au(x_i, y_j, t_k) - F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(u_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x_i, y_j, (\cdot))) =$$

$$= \delta u/\Delta + A[u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)]/2 + Au(x_i, y_j, t_k) +$$

$$+ \Delta\Lambda_1\Lambda_2\delta u/4 - F_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}(u_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x_i, y_j, (\cdot))) =$$

$$= \frac{\delta u}{\Delta} + \frac{A}{2}(u(x_i, y_j, t_{k+1}) + u(x_i, y_j, t_k)) + \Delta\Lambda_1\Lambda_2\frac{\delta u}{4} -$$

$$- f(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}, u_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x_i, y_j, (\cdot))). \quad (4.24)$$

Будем раскладывать по формуле Тейлора точное решение уравнения (4.6)–(4.9) в окрестности точки $(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})$ при условиях ограниченных производных соответствующих порядков. Тогда

$$\delta u = \Delta \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + O(\Delta^3), \quad (4.25)$$

$$[u(x_i, y_j, t_{k+1}) + u(x_i, y_j, t_k)]/2 = u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + O(\Delta^2). \quad (4.26)$$

Используя разложение по формуле Тейлора и определение оператора A , получаем

$$\begin{aligned} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) \right) = \\ = -Au(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + O(h_1^2) + O(h_2^2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Подставим соотношения (4.25)–(4.27) в (4.24) и используем то, что операторы Λ_1 и Λ_2 ограничены и u является решением уравнения (4.6). Получим

$$\begin{aligned} \Psi_k^{i,j} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - \\ &- a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) \right) - \\ &- f(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{k+\frac{1}{2}}^{i,j}, u_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x_i, y_j, (\cdot))) + \\ &+ O(\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2) = O(\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2). \end{aligned}$$

Из этого соотношения немедленно вытекает заключение теоремы.

Обозначим величину погрешности метода в узлах через $\varepsilon_k^{i,j} = u(x_i, y_j, t_k) - u_k^{i,j}$.

Будем говорить, что метод сходится, если $\varepsilon_k^{i,j} \rightarrow 0$ при $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow 0$ и $\Delta \rightarrow 0$ при всех $i = 0, \dots, N_1$, $j = 0, \dots, N_2$ и $k = 0, \dots, M$.

В силу нелинейного характера зависимости функционала f (а следовательно, и F) от состояния и его предыстории, обычные методы исследования сходимости [33] неприменимы. Поэтому основная цель дальнейших исследований состоит в применении аппарата абстрактных разностных схем с последовательством, изложенного в главе 2.

4.3. Вложение схемы переменных направлений в общую разностную схему с последовательством

Проведем вложение схемы (4.22) в общую разностную схему с последовательством. При каждом $t_k \in \Sigma_\Delta$ определим значения дискретной модели вектором $z_k = (u_k^{1,1}, u_k^{1,2}, \dots, u_k^{1,N_2-1}, u_k^{2,1}, u_k^{2,2}, \dots, u_k^{2,N_2-1}, \dots, u_k^{N_1-1,N_2-1})' \in Z$, где Z — векторное пространство размерности $q = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$. Тогда систему (4.22) можно переписать в виде уравнения

$$B(z_{k+1} - z_k)/\Delta + Az_k = F_{k+\frac{1}{2}}(v(\cdot)), \quad k = 0, \dots, M-1, \quad (4.28)$$

где $F_{k+\frac{1}{2}}(v(\cdot)) = (F_{k+\frac{1}{2}}^{1,1}(v^{1,1}(\cdot)), \dots, F_{k+\frac{1}{2}}^{N_1-1,N_2-1}(v^{N_1-1,N_2-1}(\cdot)))'$, $v(\cdot) = I(\{u_l\}_k) \in Q^q[-\tau, \Delta]$. Здесь $V = Q^q[-\tau, \Delta]$ — интерполяционное пространство, пространство q -мерных вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит пространству $Q[-\tau, \Delta]$.

Исследуем устойчивость полученной схемы. Для этого используем общую теорию устойчивости двухслойных схем.

Введем пространство Z сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и обращающих в нуль на γ_h , со скалярным произведением

$$(z, u) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i,j} u^{i,j} h_1 h_2$$

и нормой $\|z\| = \sqrt{(z, z)}$. Докажем, что операторы $A = -\Lambda_1 - \Lambda_2$,

$B = (E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)$ — самосопряженные и положительные в Z . Рассмотрим следующее скалярное произведение:

$$\begin{aligned}
(-\Lambda_1 z, u) &= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \Lambda_1 z^{i,j} u^{i,j} h_1 h_2 = \\
&= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{a^2}{h_1^2} (z^{i+1,j} - 2z^{i,j} + z^{i-1,j}) u^{i,j} h_1 h_2 = \\
&= - \frac{a^2}{h_1^2} \left(\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i+1,j} u^{i,j} h_1 h_2 - 2 \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i,j} u^{i,j} h_1 h_2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i-1,j} u^{i,j} h_1 h_2 \right) = \\
&= - \frac{a^2}{h_1^2} \left(\sum_{i=2}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i,j} u^{i-1,j} h_1 h_2 - 2 \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i,j} u^{i,j} h_1 h_2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{N_1-2} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i,j} u^{i+1,j} h_1 h_2 \right). \tag{4.29}
\end{aligned}$$

В силу однородности граничных условий выполняется $u^{i,j} = 0$, $z^{i,j} = 0$ для индексов $i = 0$; $j = 0$; $i = N_1$; $j = N_2$. Следовательно, соотношение (4.29) имеет вид

$$\begin{aligned}
(-\Lambda_1 z, u) &= - \frac{a^2}{h_1^2} \left(\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i,j} u^{i-1,j} h_1 h_2 - \right. \\
&\quad \left. - 2 \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i,j} u^{i,j} h_1 h_2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i,j} u^{i+1,j} h_1 h_2 \right) = \\
&= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i,j} \frac{a^2}{h_1^2} (u^{i+1,j} - 2u^{i,j} + u^{i-1,j}) h_1 h_2 = (z, -\Lambda_1 u).
\end{aligned}$$

Из этого соотношения получаем, что оператор $-\Lambda_1$ — самосопряженный. Аналогичным образом получаем, что оператор $-\Lambda_2$ — самосопряженный.

Покажем, что $-\Lambda_1$ — положительный оператор.

$$\begin{aligned}
(-\Lambda_1 u, u) &= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \Lambda_1 u^{i,j} u^{i,j} h_1 h_2 = \\
&= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{a^2}{h_1^2} (u^{i+1,j} - 2u^{i,j} + u^{i-1,j}) u^{i,j} h_1 h_2 = \\
&= \frac{a^2}{h_1^2} \sum_{j=1}^{N_2-1} ((u^{1,j})^2 + (u^{N_1-1,j})^2) h_1 h_2 + \\
&+ \frac{a^2}{h_1^2} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (u^{i,j} - u^{i+1,j})^2 h_1 h_2 \geq 0. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Скалярное произведение $(-\Lambda_1 u, u) = 0$, когда все слагаемые соотношения (4.30) равны 0. Следовательно, $u^{i,j} = 0$ для $i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1$. Откуда получаем, что $u = 0$. Из этого вытекает, что $-\Lambda_1$ — положительный оператор. Аналогично доказывается, что оператор $-\Lambda_2$ — положительный. Так как $A = -\Lambda_1 - \Lambda_2$, то A — самосопряженный положительный оператор. Операторы Λ_1 и Λ_2 перестановочны, так как

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 \Lambda_2 u^{i,j} &= \Lambda_1 u^{i,j+1} - 2\Lambda_1 u^{i,j} + \Lambda_1 u^{i,j-1} = \\
&= u^{i+1,j+1} - 2u^{i,j+1} + u^{i-1,j+1} - 2u^{i+1,j} + 4u^{i,j} - 2u^{i-1,j} + u^{i+1,j-1} - \\
&- 2u^{i,j-1} + u^{i-1,j-1} = \Lambda_2 u^{i+1,j} - 2\Lambda_2 u^{i,j} + \Lambda_2 u^{i-1,j} = \\
&= \Lambda_2 \Lambda_1 u^{i,j}, \quad i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2.
\end{aligned}$$

Тогда $(-\Lambda_1)(-\Lambda_2)$ — самосопряженный положительный оператор (см. [33, с. 594]). Следовательно, $B = (E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)$ — самосопряженный положительный оператор.

Так как B — положительный оператор в конечномерном гильбертовом пространстве, то существует B^{-1} (см. [33, с. 595]). Следовательно, можно привести уравнение (4.28) к явной форме

$$z_{k+1} = Sz_k + \Delta\Phi(t_k, I(\{z_l\}_k), \Delta), \quad k = 0, \dots, M-1, \quad (4.31)$$

где оператор перехода определяется формулой $S = E - \Delta B^{-1}A$, а функция продвижения на шаг — формулой $\Phi(t_k, v, \Delta) = B^{-1}G_k(v(\cdot))$. Аналогично получаем, что существует A^{-1} .

Введем в пространстве Z энергетическую норму $\|z\|_A = \sqrt{(Az, z)}$.

Определим операторы $\bar{\Lambda}_1$ и $\bar{\Lambda}_2$ следующим образом: $\Lambda_1 = \bar{\Lambda}_1 a^2 / h_1^2$, $\Lambda_2 = \bar{\Lambda}_2 a^2 / h_2^2$.

Так как $\Lambda_1 \Lambda_2$ — положительный самосопряженный оператор, то и $\bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2$ является положительным самосопряженным оператором в силу положительности a , h_1 и h_2 .

Докажем, что для некоторого числа $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$B > \varepsilon E + \Delta A / 2. \quad (4.32)$$

Для этого рассмотрим

$$\begin{aligned} B - \frac{1}{2}\Delta A &= (E - \frac{\Delta}{2}\Lambda_1)(E - \frac{\Delta}{2}\Lambda_2) + \frac{1}{2}\Delta(\Lambda_1 + \Lambda_2) = \\ &= E + \frac{\Delta^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2 = E + \frac{\Delta^2}{4}\frac{a^4}{h_1^2 h_2^2}\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Так как $\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2$ — положительный самосопряженный оператор в конечномерном гильбертовом пространстве, то по §1 из дополнения в [33] получаем

$$(\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2 u, u) \geq \delta_{\min} \|u\|^2 > \delta_{\min} \|u\|^2 / 2, \quad (4.34)$$

где δ_{\min} — наименьшее собственное значение оператора $\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2$. Так как $\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2$ — положительный оператор, то $\delta_{\min} > 0$. Соотношение (4.34) показывает, что $\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2 > \delta_{\min} E / 2$. Следовательно, соотношение (4.33) будет иметь вид $B - \Delta A / 2 >$

$(1 + \Delta^2 a^4 \delta_{\min}/8h_1^2 h_2^2)E$. Поэтому условие (4.32) выполняется, если $\varepsilon = 1 + \Delta^2 a^4 \delta_{\min}/8h_1^2 h_2^2$. Из условия (4.32) следует, что для схемы (4.28) верно неравенство (см. [33], теорема 7 из гл. VI, § 2)

$$\|z_{k+1}\|_A^2 \leq \|z_0\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left(\sum_{l=0}^k \Delta \|F_l\|^2 \right). \quad (4.35)$$

Из оценки (4.35) следует, что

$$\|z_{k+1}\|_A \leq \|z_0\|_A + \left(\frac{1}{2\varepsilon} \sum_{l=0}^k \Delta \|F_{l+\frac{1}{2}}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применим к обеим частям уравнения (4.28) оператор A^{-1} , который удовлетворяет условию $A^{-1} > 0$. Получим

$$\tilde{B}(z_{k+1} - z_k)/\Delta + \tilde{A}z_k = A^{-1}F_{k+\frac{1}{2}}, \quad k = 0, \dots, M-1,$$

где $\tilde{A} = E$, $\tilde{B} = A^{-1} + \Delta E/2 + \Delta^2 A^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2/4$. Так как Λ_1 , Λ_2 , A^{-1} — положительные и самосопряженные операторы в конечномерном гильбертовом пространстве, то по предыдущим рассуждениям получаем, что $\tilde{B} > \varepsilon A^{-1} + \Delta E/2$. Поэтому по теореме 10 из [33], гл. VI, § 2 имеет место оценка

$$\|z_{k+1}\| \leq \sqrt{L_1} \|z_0\| + \left(\sum_{l=0}^k \Delta \|F_{l+\frac{1}{2}}\|_{A^{-1}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, схема (4.28) устойчива по начальным данным и по правой части при условии, что существует константа K , такая, что $h_1^2 + h_2^2 \leq K \Delta h_1 h_2$.

Определим функцию точных значений соотношениями

$$w_k = (u(x_1, y_1, t_k), u(x_1, y_2, t_k), \dots, u(x_{N_1-1}, y_{N_2-1}, t_k))' \in Z,$$

$$k = -0, \dots, M-1.$$

Стартовые значения модели можно взять равные функции точных значений:

$$z_j = w_j = (\varphi(x_1, y_1, t_j), \varphi(x_1, y_2, t_j), \dots, \varphi(x_{N_1-1}, y_{N_2-1}, t_j))',$$

$$j = -m, \dots, 0.$$

Определения невязки без интерполяции (4.23) в схеме переменных направлений для уравнения теплопроводности и невязки с интерполяцией (2.6) в общей схеме существенно отличаются. Однако справедлива теорема, которая связывает эти два определения.

Теорема 6. Пусть невязка метода в смысле (4.23) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$, функции $F_k^{i,j}$ липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I липшицев и имеет порядок погрешности Δ^{p_0} на точном решении. Тогда невязка с интерполяцией в смысле (2.6) имеет порядок $\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$.

Доказательство. Запишем определение невязки в смысле (2.6):

$$d_n = (w_{n+1} - Sw_n)/\Delta - \Phi(t_n, I(\{w_i\}_{-m}^n), \Delta), \quad n = 0, \dots, M-1.$$

Так как B — линейный оператор и существует B^{-1} , то B^{-1} тоже является линейным оператором. В конечномерном пространстве линейный оператор является ограниченным, следовательно, B и B^{-1} являются ограниченными.

Для каждой компоненты вектора w получаем

$$\begin{aligned} |d_n^{i,j}| &= |B^{-1}Bd_n^{i,j}| = |B^{-1}[B(u(x_i, y_j, t_{n+1}) - Su(x_i, y_j, t_n))/\Delta - \\ &\quad - B\Phi(t_n, I(\{u(x_i, y_j, t_l)\}_n), \Delta)]| = \\ &= |B^{-1}[B(u(x_i, y_j, t_{n+1}) - (E - \Delta B^{-1}A)u(x_i, y_j, t_n))/\Delta - \\ &\quad - BB^{-1}F_{n+\frac{1}{2}}^{i,j}(I(\{u(x_i, y_j, t_l)\}_n))]|, \end{aligned}$$

где $n = 0, \dots, M-1$. Добавим и вычтем $F_{n+\frac{1}{2}}^{i,j}(u_{t_{n+\frac{1}{2}}}(x_i, y_j, (\cdot)))$. Получим

$$\begin{aligned} |d_n^{i,j}| = & |B^{-1}[B(u(x_i, y_j, t_{n+1}) - u(x_i, y_j, t_n))/\Delta + Au(x_i, y_j, t_n) - \\ & - F_{n+\frac{1}{2}}^{i,j}(u_{t_{n+\frac{1}{2}}}(x_i, y_j, (\cdot))) - \\ & - F_{n+\frac{1}{2}}^{i,j}(I(\{u(x_i, y_j, t_l)\}_{n+\frac{1}{2}})) + F_{n+\frac{1}{2}}^{i,j}(u_{t_{n+\frac{1}{2}}}(x_i, y_j, (\cdot)))|, \\ & n = 0, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Из определения порядка невязки метода в смысле (4.23), липшицевости F по $v(\cdot)$, ограниченности оператора B^{-1} и определения порядка оператора интерполяции-экстраполяции получаем для $n = 0, \dots, M-1$

$$\begin{aligned} |d_n^{i,j}| & \leq C_{B^{-1}}C_1(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}) + C_{B^{-1}}L_fC_2\Delta^{p_0} \leq \\ & \leq C_{B^{-1}}(C_1 + L_fC_2)(\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}). \end{aligned}$$

Следовательно, норма вектора d_n удовлетворяет неравенству

$$\|d_n\| = \max_{i,j} \|d_n^{i,j}\| \leq C_{B^{-1}}(C_1 + L_fC_2)(\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}).$$

Из данного соотношения вытекает заключение теоремы.

Вложение схемы переменных направлений для уравнения теплопроводности в общую схему проведено, и из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть невязка метода в смысле (4.23) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$, функции $F_k^{i,j}$ липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I липшицев и имеет порядок погрешности Δ^{p_0} на точном решении. Тогда метод сходится с порядком $\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$.

С помощью данной теоремы получаем, что метод переменных направлений с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок $\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2$.

4.4. Численное моделирование

Пример 3. Тестовый пример.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + b \cdot u(t - \tau, x, y) - \cos(t)(x^2 + y^2) - 4a^2 \sin(t) - \\ - b \sin(t - \tau)(x^2 + y^2),$$

$t \in [0, \pi/2]$, $x \in [0, 5]$, $y \in [0, 5]$, $\tau = 0.1$; a, b — параметры. Начальные условия:

$$u(s, x, y) = \sin(s)(x^2 + y^2), \quad -\tau \leq s \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq 5.$$

Граничные условия:

$$u(t, x, 0) = \sin(t)x^2, \quad u(t, x, 5) = \sin(t)(x^2 + 25), \\ u(t, 0, y) = \sin(t)y^2, \quad u(t, 5, y) = \sin(t)(25 + y^2).$$

Точным решением является $u(t, x, y) = \sin(t)(x^2 + y^2)$. Параметры уравнения были взяты следующим образом: $a = b = 10$. Далее приведены результаты численного эксперимента. На рис. 4 и 5 изображена разница между приближенным и точным решением уравнения.

Пример 4. Двумерное уравнение Колмогорова–Пискунова–Петровского–Фишера с запаздыванием, оно же уравнение Хатчинсона с диффузией по двум пространственным переменным.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \alpha u(t, x, y)(1 - u(t - \tau, x, y)),$$

$t \in [1, 10]$, $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 4]$, $\tau = 1$; α — параметр. Начальные условия:

$$u(s, x, y) = s, \quad 1 - \tau \leq s \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4.$$

Граничные условия:

$$u(t, x, 0) = 1, \quad u(t, x, 4) = 1, \quad u(t, 0, y) = 1, \quad u(t, 2, y) = 1.$$

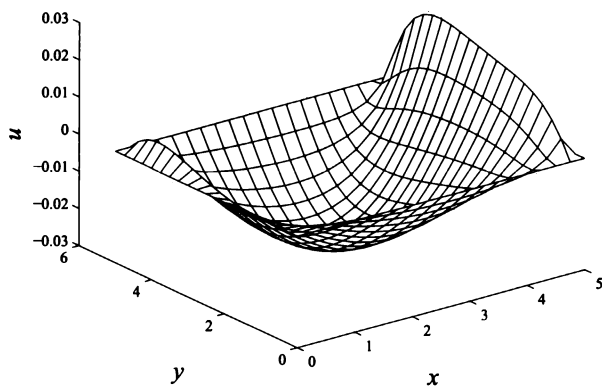


Рис. 4. Число точек разбиения по t : $M = 25$, по x : $N_1 = 20$, по y : $N_2 = 20$

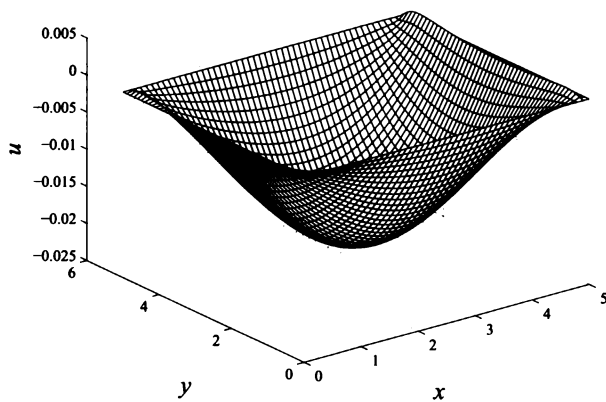


Рис. 5. Число точек разбиения по t : $M = 100$, по x : $N_1 = 50$, по y : $N_2 = 50$

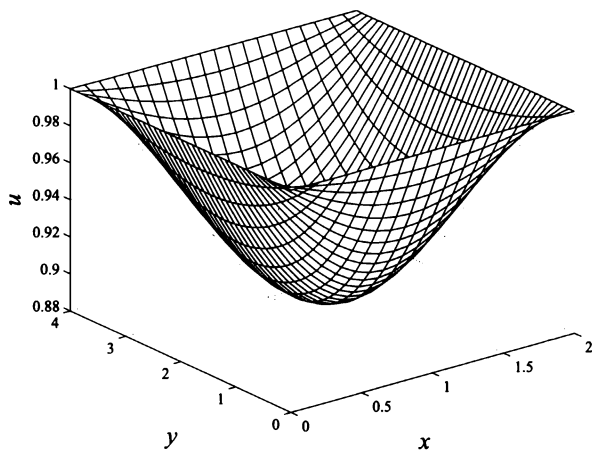


Рис. 6. Решение при $t = 2.5$. Число точек разбиения по t : $M = 400$, по x : $N_1 = 20$, по y : $N_2 = 40$

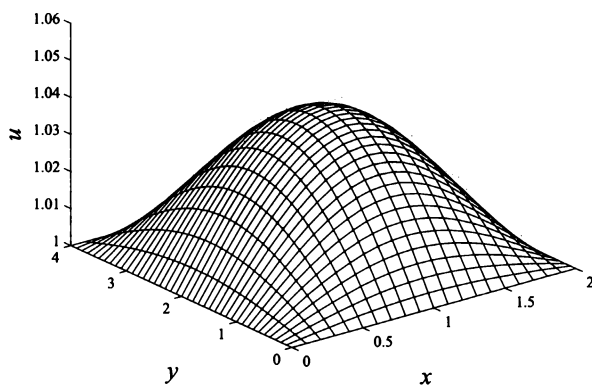


Рис. 7. Решение при $t = 3.5$. Число точек разбиения по t : $M = 400$, по x : $N_1 = 20$, по y : $N_2 = 40$

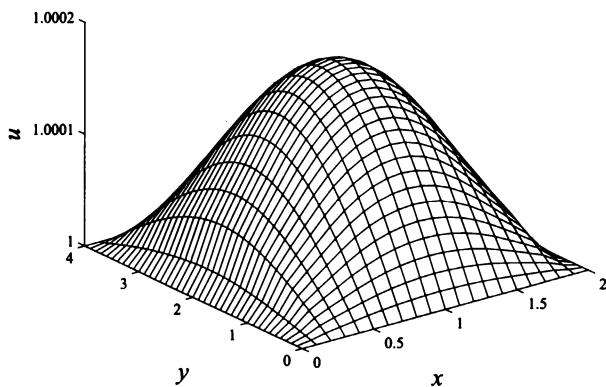


Рис. 8. Решение при $t = 8$. Число точек разбиения по t : $M = 400$, по x : $N_1 = 20$, по y : $N_2 = 40$

Параметр уравнения был взят следующим образом: $\alpha = 10$. Далее приведены результаты численного эксперимента. На рис. 6, 7 и 8 изображено приближенное решение уравнения при разных значениях времени t .

Пример 5. Рассмотрим тестовое уравнение с переменным сосредоточенным и распределенным запаздываниями по переменной t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = & a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \sin(t)(x^2 + e^y) - \\ & - a^2 \cos(t)(2 + e^y) + u(x, y, t - t/2) - \cos(t/2)(x^2 + e^y) + \\ & + \int_{-t/2}^0 (x + y) u(x, y, t + s) ds - \\ & - (x + y)(x^2 + e^y)(\sin(t) - \sin(t/2)), \end{aligned} \quad (4.36)$$

где $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 2]$, $t \in [1, 3]$, $a = 2$. Начальные условия:

$$u(x, y, t) = \cos(t)(x^2 + e^y), \quad x \in [0, 2], \quad y \in [0, 2], \quad t \in [1, 3].$$

Граничные условия:

$$u(0, y, t) = \cos(t)e^y, \quad u(2, y, t) = \cos(t)(4 + e^y), \quad t \in [1, 3],$$

$$u(x, 0, t) = \cos(t)(x^2 + 1), \quad u(x, 2, t) = \cos(t)(x^2 + e^2), \quad t \in [1, 3].$$

Точным решением уравнения (4.36) является $u(x, y, t) = \cos(t)(x^2 + e^y)$.

Далее приведены результаты численного эксперимента. Таблица 3 содержит максимум модуля разности матриц точного и приближенного решений уравнения (4.36) при разных шагах h_x , h_y и Δ . На рис. 9 изображено приближенное решение рассматриваемого уравнения при $t = 3$. Разница между точным и приближенным решениями уравнения (4.36) при $t = 3$ показана на рис. 10.

Таблица 3. Максимум модуля разности матриц точного и приближенного решений уравнения (4.36) при разных шагах h_x , h_y и Δ

	$M = 20$	$M = 40$	$M = 100$
$N_1 = 20, N_2 = 20$	0.0056	0.0040	0.0024
$N_1 = 40, N_2 = 40$	0.0059	0.0042	0.0025
$N_1 = 80, N_2 = 80$	0.0060	0.0043	0.0025

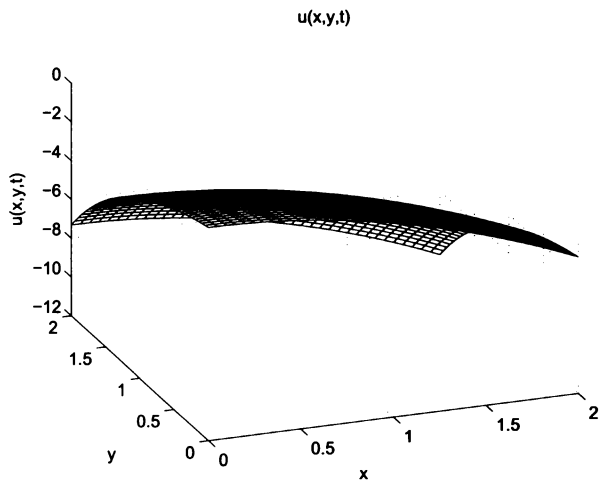


Рис. 9. Приближенное решение при $t = 3$. Число точек разбиения по t : $M = 40$, по x : $N_1 = 40$, по y : $N_2 = 40$

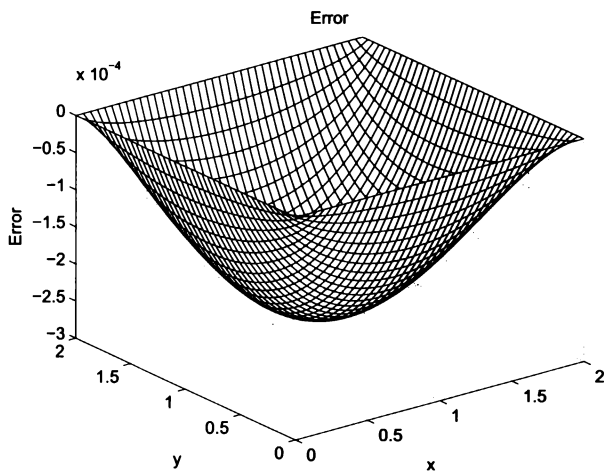


Рис. 10. Разница между точным и приближенным решением при $t = 3$. Число точек разбиения по t : $M = 40$, по x : $N_1 = 40$, по y : $N_2 = 40$

5. Численные методы решения гиперболического уравнения с наследственностью. Результаты получены совместно с Е. Е. Ташировой

В этой главе сконструировано семейство сеточных методов для численного решения волнового уравнения с запаздыванием общего вида на основе идеи разделения текущего состояния и функции-предыстории. Получена теорема о порядке сходимости методов с помощью вложения в общую разностную схему с последствием. Приводятся результаты расчетов тестовых примеров с постоянным и переменным запаздыванием.

5.1. Постановка задачи

Дано волновое уравнение с эффектом наследственности вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)) : t_0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq X, \quad (5.1)$$

с граничными

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(X, t) = g_2(t) : t_0 \leq t \leq T \quad (5.2)$$

и начальными условиями

$$u(x, t) = \varphi(x, t) : 0 \leq x \leq X, \quad t_0 - \tau \leq t < t_0. \quad (5.3)$$

Здесь $u(x, t)$ — искомая функция; $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + \xi), -\tau \leq \xi \leq 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t ; τ — величина запаздывания; $f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot))$ — функционал, определенный на $[0, X] \times [t_0, T] \times R \times Q$, $Q = Q[-\tau, 0]$ — множество функций $u(\xi)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0]$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{\xi \in [-\tau, 0]} |u(\xi)|$.

Будем предполагать, что функционал f и функции g_1, g_2, φ таковы, что задача имеет единственное решение $u(x, t)$ [99].

5.2. Разностный метод

Разобьем отрезок $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, где N — некоторое целое число. Введем точки $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$. Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на части с шагом Δ . Будем считать, что $m = \tau/\Delta$ — целое число.

Введем точки $t_j = t_0 + j\Delta$, $j = -m, \dots, M$. Будем обозначать приближение точного решения $u(x_i, t_j)$ через u_j^i .

Как и в главе 3, введем дискретную предысторию к моменту t_j при каждом фиксированном i :

$$\{u_k^i\}_j = \{u_k^i : j - m \leq k \leq j\}.$$

Определим также оператор интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории как отображение:

$$I : \{u_k^i\}_j \rightarrow v_j^i(\cdot) \in Q[t_j - \tau, t_j + \Delta].$$

Используемое в дальнейшем определение порядка погрешности оператора интерполяции-экстраполяции было дано в главе 3.

Для $0 \leq s \leq 1$ рассмотрим семейство методов с весами:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{\Delta^2} &= sa^2 \frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + \\ &+ sa^2 \frac{u_{j-1}^{i-1} - 2u_{j-1}^i + u_{j-1}^{i+1}}{h^2} + \\ &+ (1 - 2s)a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} + F_j^i(v_j^i(\cdot)), \\ i &= 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

с граничными

$$u_j^0 = g_1(t_j), \quad u_j^N = g_2(t_j)$$

и начальными условиями

$$u_j^i = \varphi(x_i, t_j) : -m \leq j \leq 0,$$

$F_j^i(v_j^i(\cdot))$ — некоторый функционал, определенный на $Q[-\tau, \Delta]$, липшицевый по переменной $v_j^i(\cdot)$ с константой L_F и связанный с функционалом $f(x_i, t_j, u_j^i, v_j^i(\cdot))$.

При $s = 0$ получается явная схема, при других s , $0 < s \leq 1$, при каждом фиксированном j система является линейной трех-диагональной относительно u_{j+1}^i с диагональным преобладанием, которая эффективно решается методом прогонки.

Невязкой (без интерполяции) метода назовем:

$$\begin{aligned} \psi_j^i = & \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\Delta^2} - \\ & - sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1}))}{h^2} - \\ & - sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_{j-1}) + u(x_{i+1}, t_{j-1}))}{h^2} - \\ & - (1 - 2s)a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} - \\ & - F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок $h^{p_1} + \Delta^{p_2}$, если существует константа C , что $|\psi_i^j| \leq C(h^{p_1} + \Delta^{p_2})$ для всех $i = 1, \dots, N-1$, $j = 0, \dots, M-1$.

Теорема 8. Если для точного решения задачи (5.1)–(5.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно, $F_j^i(v_j^i(\cdot)) = f(x_i, t_j, u_j^i, v_j^i(\cdot))$, то для любого $0 \leq s \leq 1$ невязка имеет порядок $h^2 + \Delta^2$.

Доказательство. Невязка определяется равенством

$$\psi_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\Delta^2} -$$

$$\begin{aligned}
& -sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1})}{h^2} - \\
& -sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_{j-1}) + u(x_{i+1}, t_{j-1})}{h^2} - \\
& -(1-2s)a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} - \\
& -f(x_i, t_j, u(x_i, t_j), u_{t_j}(x_i, \cdot)).
\end{aligned}$$

Разложим функцию $u(x, t)$ по формуле Тейлора в окрестности точек (x_i, t_j) , (x_i, t_{j+1}) , (x_i, t_{j-1}) . Тогда получим следующие равенства для значений функции в точках:

$$\begin{aligned}
u(x_i, t_{j+1}) &= u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j)\Delta^2 + \\
& + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_j)\Delta^3 + O(\Delta^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x_i, t_{j-1}) &= u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j)\Delta^2 - \\
& - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_j)\Delta^3 + O(\Delta^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x_{i-1}, t_j) &= u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)h^2 - \\
& - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j)h^3 + O(h^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)h^2 + \\
& + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j)h^3 + O(h^4),
\end{aligned}$$

$$u(x_{i-1}, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 - \\ - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j+1})h^3 + O(h^4),$$

$$u(x_{i+1}, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 + \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j+1})h^3 + O(h^4),$$

$$u(x_{i-1}, t_{j-1}) = u(x_i, t_{j-1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j-1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1})h^2 - \\ - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j-1})h^3 + O(h^4),$$

$$u(x_{i+1}, t_{j-1}) = u(x_i, t_{j-1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j-1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1})h^2 + \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j-1})h^3 + O(h^4).$$

Подставив эти соотношения в формулу для ψ_j^i , получим

$$\psi_j^i = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + O(\Delta^2) - sa^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) + O(h^2) \right) - \\ - sa^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1}) + O(h^2) \right) - \\ - (1 - 2s)a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + O(h^2) \right) - f(t_j, x_i, u(x_i, t_j), u_{t_j}(x_i, \cdot)).$$

Разложим функцию $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_i, t_j) . В результате получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, t_j) \Delta + O(\Delta^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, t_j) \Delta + O(\Delta^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_i^j = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right) - f(t_j, x_i, u(x_i, t_j), u_{t_j}(x_i, \cdot)) + \\ + O(\Delta^2 + h^2). \end{aligned}$$

В силу уравнения (5.1)

$$\psi_j^i = O(\Delta^2 + h^2).$$

Теорема доказана.

Обозначим величину погрешности метода в узлах через $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$. Будем говорить, что метод сходится, если $\varepsilon_j^i \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0$ для всех $i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M$. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует такая константа C , не зависящая от Δ, h , что выполняется неравенство $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M$.

Для исследования порядка сходимости применим аппарат абстрактных разностных схем с последствием, изложенный в главе 2.

5.3. Исследование сходимости

Исследуем схемы семейства (5.4) на сходимость с помощью вложения в общую разностную схему главы 2. Будем рассматривать задачи с однородными краевыми условиями:

$$u(0, t) = u(X, t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

При каждом t_j определим значения дискретной модели вектором $\tilde{y}_j = (u_j^0, u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1}, u_j^N)' \in \tilde{Y}$, где $'$ — знак транспонирования, \tilde{Y} — векторное пространство размерности $N + 1$ с нормой:

$$\|\tilde{y}_n\|_{\tilde{Y}}^2 = \sum_{i=0}^N (\tilde{y}_n^i)^2. \quad (5.6)$$

В пространстве \tilde{Y} введем операторы A и \tilde{A} :

$$Au_j^i = -a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ Au_j^0 = 0, \quad Au_j^N = 0, \quad (5.7)$$

$$\tilde{A} = \Delta^2 A, \quad (5.8)$$

тогда систему (5.4) можно переписать в виде

$$\frac{\tilde{y}_{j+1} - 2\tilde{y}_j + \tilde{y}_{j-1}}{\Delta^2} + sA\tilde{y}_{j+1} + sA\tilde{y}_{j-1} + (1 - 2s)A\tilde{y}_j = F_j(v(\cdot)), \quad (5.9)$$

где $F_j(v(\cdot)) = (F_j^0(v^0(\cdot)), F_j^1(v^1(\cdot)), \dots, F_j^{N-1}(v^{N-1}(\cdot)), F_j^N(v_N(\cdot)))'$, $v(\cdot) = I(\{\tilde{y}_k\}_j) \in Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$, $Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$ — пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит $Q[-\tau, \Delta]$.

Воспользуемся тождеством

$$\tilde{y}_{j+1} = 2\tilde{y}_j + \Delta^2 \frac{\tilde{y}_{j+1} - 2\tilde{y}_j + \tilde{y}_{j-1}}{\Delta^2} - \tilde{y}_{j-1}$$

и введем операторы

$$R = \frac{1}{\Delta^2} E + sA, \quad (5.10)$$

$$\tilde{R} = \Delta^2 R = E + s\tilde{A}. \quad (5.11)$$

Заметим, что операторы \tilde{A} (5.8) и \tilde{R} (5.11), в отличие от операторов A (5.7) и R (5.10), не зависят от h и Δ , а лишь от $\sigma = a^2 \Delta^2 / h^2$.

Приведем уравнение (5.9) к виду

$$R(\tilde{y}_{j+1} - 2\tilde{y}_j + \tilde{y}_{j-1}) + A\tilde{y}_j = F_j(v(\cdot)). \quad (5.12)$$

Так как при любом допустимом весе s уравнение (5.12) разрешимо относительно \tilde{y}_{j+1} (существует R^{-1}), то можно привести уравнение (5.12) к явной форме

$$\tilde{y}_{j+1} = 2\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1} - R^{-1}A\tilde{y}_j + R^{-1}(F_j(v(\cdot))). \quad (5.13)$$

Введем вектор $y_j = (y_j^1, y_j^2)' = (\tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_j)' \in Y$, где $Y = \tilde{Y} \oplus \tilde{Y}$ — векторное пространство размерности $q = 2(N+1)$. Считаем, что если в пространстве \tilde{Y} определена норма, то в пространстве Y она определяется следующим образом:

$$\|y\|_Y^2 = \|y^1\|_{\tilde{Y}}^2 + \|y^2\|_{\tilde{Y}}^2. \quad (5.14)$$

Соотношение (5.13) можно переписать в виде

$$y_{j+1}^1 = y_j^2,$$

$$y_{j+1}^2 = 2y_j^2 - y_j^1 - R^{-1}Ay_j^2 + R^{-1}(F_j(v(\cdot))).$$

В результате получаем разностную схему:

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j), \Delta), \quad (5.15)$$

где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - R^{-1}A \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j), \Delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1}F_j(I(\{y_k^2\}_j))/\Delta \end{pmatrix}.$$

Определим функцию точных значений для схемы (5.15) соотношениями

$$z_j = (z_j^1, z_j^2)' = (\tilde{z}_{j-1}, \tilde{z}_j)',$$

$$\tilde{z}_j = (u(x_0, t_j), u(x_1, t_j), \dots, u(x_{N-1}, t_j), u(x_N, t_j))'.$$

Стартовыми значениями модели назовем функцию $\{t_j = t_0 + j\Delta \in [t_0 - \tau, T], j = -m, \dots, 0\} \rightarrow Y$:

$$y(t_j) = y_j.$$

Будем говорить, что стартовые значения модели имеют порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, если найдется константа C , не зависящая от z_j, y_j, Δ, h , такая, что

$$\|z_j - y_j\|_Y \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2}), j = -m, \dots, 0.$$

Например, можно определить стартовые значения модели (5.15) следующим образом:

$$y_j = z_j = (z_j^1, z_j^2)' = (\tilde{z}_{j-1}, \tilde{z}_j)',$$

$$\tilde{z}_j = (\varphi(x_0, t_j), \varphi(x_1, t_j), \dots, \varphi(x_N, t_j))', j = -m, \dots, 0.$$

Тогда $p_1 = \infty, p_2 = \infty$.

Погрешность аппроксимация (невязка) с интерполяцией в общей разностной схеме определяется формулой (2.6).

Это определение невязки отличается от введенного определения невязки без интерполяции (5.5). Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. Пусть невязка в смысле (5.5) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_j^i липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I имеет порядок погрешности p_0 на точном решении, σ зафиксировано, тогда невязка с интерполяцией в смысле (2.6) имеет одинаковые порядки погрешности по Δ и h , равные $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2\}+1}$.

Доказательство. Рассмотрим нормы координат невязки (2.6):

$$\begin{aligned} \|d_n^1\|_{\tilde{Y}}^2 &= \left\| \frac{z_{n+1}^1 - z_n^2}{\Delta} \right\|^2 = \left\| \frac{\tilde{z}_n - \tilde{z}_n}{\Delta} \right\|^2 = 0, \\ \|d_n^2\|_{\tilde{Y}}^2 &= \left\| \frac{z_{n+1}^2 + z_n^1 - 2z_n^2 + R^{-1}Az_n^2}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}R^{-1}(F_n(I(\{z_k^2\}_n))) \right\|^2 = \\ &= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} + \tilde{z}_{n-1} - 2\tilde{z}_n}{\Delta} + \frac{1}{\Delta}R^{-1}A\tilde{z}_n - \frac{1}{\Delta}R^{-1}(F_n(I(\{\tilde{z}_k\}_n))) \right\|^2 = \\ &= \Delta^2 \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}R^{-1}A\tilde{z}_n - \frac{1}{\Delta^2}R^{-1}(F_n(I(\{\tilde{z}_k\}_n))) \right\|^2 \end{aligned}$$

Отсюда по определению операторов \tilde{R} (5.11), \tilde{A} (5.8)

$$\begin{aligned} \|d_n^2\|_{\tilde{Y}}^2 &= \Delta^2 \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta^2}\tilde{R}^{-1}\tilde{A}\tilde{z}_n - \tilde{R}^{-1}(F_n(I(\{\tilde{z}_k\}_n))) \right\|^2 = \\ &= \Delta^2 \|\tilde{R}^{-1}\|^2 \left\| \tilde{R} \left(\frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta^2}\tilde{A}\tilde{z}_n - F_n(I(\{\tilde{z}_k\}_n)) \right\|^2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Тогда по определению нормы в \tilde{Y} (5.6)

$$\left\| \tilde{R} \left(\frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + \frac{1}{\Delta^2}\tilde{A}\tilde{z}_n - F_n(I(\{\tilde{z}_k\}_n)) \right\|_{\tilde{Y}}^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + s\tilde{A} \left(\frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta^2} \tilde{A}\tilde{z}_n - F_n(I(\{\tilde{z}_k\}_n)) \right\|_{\tilde{Y}}^2 = \\
&= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2} (s\tilde{A}\tilde{z}_{n+1} + (1-2s)\tilde{A}\tilde{z}_n + s\tilde{A}\tilde{z}_{n-1}) - \right. \\
&\quad \left. - F_n(I(\{\tilde{z}_k\}_n)) \right\|_{\tilde{Y}}^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{u(x_i, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_{n-1}))}{\Delta^2} - \right. \\
&\quad \left. - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1}))}{h^2} - \right. \\
&\quad \left. - (1-2s)a^2 \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2} - \right. \\
&\quad \left. - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, t_{n-1}))}{h^2} - F_n^i(I(\{u_k^i\}_n)) \right|^2. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое под знаком суммы в (5.17), используя предположения теоремы

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{u(x_i, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_{n-1}))}{\Delta^2} - \right. \\
&\quad \left. - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1}))}{h^2} - \right. \\
&\quad \left. - (1-2s)a^2 \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2} - \right. \\
&\quad \left. - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, t_{n-1}))}{h^2} - \right. \\
&\quad \left. - F_n^i(I(\{u_k^i\}_n)) \pm F_n^i(u_{t_n}(x_i, \cdot)) \right| \leq \\
&\leq |\psi_i^n| + |F_n^i(u_{t_n}(x_i, \cdot)) - F_n^i(I(\{u_k^i\}_n))| \leq \\
&\leq C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F \|u_{t_n}(x_i, \cdot) - I(\{u_k^i\}_n)\|_Q \leq
\end{aligned}$$

$$\leq C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F C_2 \Delta^{p_0}. \quad (5.18)$$

В результате из (5.16), (5.17), (5.18) получаем

$$\begin{aligned} \|d_n\|_Y^2 &\leq \Delta^2 \|\tilde{R}^{-1}\|^2 \sum_{i=1}^{N-1} (C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F C_2 \Delta^{p_0})^2 = \\ &= \Delta^2 \|\tilde{R}^{-1}\|^2 (N-1) (C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F C_2 \Delta^{p_0})^2 \leq \\ &\leq \Delta^2 (C_3 \Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + C_4 h^{p_2})^2 = \\ &= \Delta^2 \left(C_3 \Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + C_4 (a\Delta/\sqrt{\sigma})^{p_2} \right)^2, \end{aligned}$$

где $C_3 = \|\tilde{R}^{-1}\| \sqrt{N-1} (C_1 + L_F C_2)$, $C_4 = \|\tilde{R}^{-1}\| \sqrt{N-1} C_1$.

То есть справедлива оценка

$$\|d_n\|_Y \leq C \Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2\}+1},$$

где $C = C_3 + C_4 (a/\sqrt{\sigma})^{p_2}$.

Теорема доказана.

Для исследования устойчивости схемы применим результаты работ [33, 34]. Для этого рассмотрим однородную разностную схему, соответствующую (5.12):

$$R(\tilde{y}_{j+1} - 2\tilde{y}_j + \tilde{y}_{j-1}) + A\tilde{y}_j = 0. \quad (5.19)$$

Оператор A (5.7) самосопряженный и положительный [33] в смысле скалярного произведения векторов $\tilde{y} = (\tilde{y}^0, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^N) \in \tilde{Y}$, $\tilde{w} = (\tilde{w}^0, \tilde{w}^1, \dots, \tilde{w}^N) \in \tilde{Y}$:

$$(\tilde{y}, \tilde{w}) = \sum_{i=0}^N \tilde{y}^i \tilde{w}^i h.$$

Тогда оператор R (5.10) также самосопряженный и положительный.

В [34] доказано, что если для схемы (5.19) выполняется условие

$$R > \frac{1}{4}A, \quad (5.20)$$

то при любых начальных условиях для решения (5.19) справедливо неравенство

$$\|\tilde{y}_{n+1}\|_* \leq \|\tilde{y}_n\|_*, \quad (5.21)$$

где

$$\|\tilde{y}_n\|_*^2 = \frac{1}{4}(A(\tilde{y}_n + \tilde{y}_{n-1}), \tilde{y}_n + \tilde{y}_{n-1}) + ((R - \frac{1}{4}A)(\tilde{y}_n + \tilde{y}_{n-1}), \tilde{y}_n + \tilde{y}_{n-1}).$$

Теперь рассмотрим однородную схему, соответствующую (5.15):

$$y_{j+1} = Sy_j. \quad (5.22)$$

Из неравенства (5.21) следует, что

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}^1\|_* &\leq \|y_n^1\|_*, \\ \|y_{n+1}^2\|_* &\leq \|y_n^2\|_*. \end{aligned}$$

Тогда по определению нормы (5.14) в пространстве Y :

$$\|y_{n+1}\|_Y^2 = \|y_{n+1}^1\|_*^2 + \|y_{n+1}^2\|_*^2 \leq \|y_n^1\|_*^2 + \|y_n^2\|_*^2 = \|y_n\|_Y^2.$$

Отсюда

$$\|y_{n+1}\|_Y \leq \|y_n\|_Y,$$

что означает выполнение следующей оценки для уравнения (5.22):

$$\|S\| \leq 1.$$

Следовательно, при выполнении условия (5.20) схема (5.15) устойчива в смысле определения, данного в главе 2.

Используя (5.10), операторное условие устойчивости для исследуемой схемы можно переписать в виде [34]:

$$\frac{1}{\Delta^2}E + \left(s - \frac{1}{4}\right)A > 0,$$

которое означает, что для любого отличного от нуля $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ выполняется

$$\frac{1}{\Delta^2}(\tilde{y}, \tilde{y}) + \left(s - \frac{1}{4}\right)(A\tilde{y}, \tilde{y}) > 0. \quad (5.23)$$

Так как наибольшее собственное значение оператора A (5.7) оценивается сверху величиной $4a^2/h^2$ [34], то

$$(\tilde{y}, \tilde{y}) > \frac{h^2}{4a^2}(A\tilde{y}, \tilde{y}).$$

Значит, неравенство (5.23) будет выполнено, если потребовать

$$\frac{h^2}{4a^2\Delta^2} + s - \frac{1}{4} > 0.$$

Таким образом, схема (5.15) устойчива, если

$$s > \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right), \quad (5.24)$$

где $\sigma = a^2\Delta^2/h^2$.

Например, для явной схемы ($s = 0$) получаем известное условие Куранта $\sigma < 1$, а в случае неявной схемы ($s = 1$) условие устойчивости выполняется при любом соотношении шагов.

Вложение в общую разностную схему с последствием проведено, откуда, используя теорему 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 10. Пусть выполнено условие устойчивости (5.24), невязка в смысле (5.5) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_j^i

липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I липшицев и имеет порядок погрешности p_0 на точном решении, стартовые значения имеют порядок $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$, σ зафиксировано, тогда метод (5.4) сходится с порядком $\Delta^{\min\{\min\{p_0, p_1, p_2\}+1, p_3\}} + h^{\min\{\min\{p_0, p_1, p_2\}+1, p_4\}}$.

5.4. Примеры численных расчетов

Пример 6. Рассмотрим уравнение с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \pi^2 e^{-t} \sin \pi x + e^{\tau-2t} \sin^2 \pi x + \\ + u(x, t)(1 - u(x, t - \tau)) \end{aligned} \quad (5.25)$$

при $\tau = 2$, $a = 1$ с начальными

$$u(x, t) = e^{-t} \sin \pi x, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Уравнение имеет точное решение $u(x, t) = e^{-t} \sin \pi x$.

На рис. 11 приведено приближенное решение этого уравнения методом (5.4), для которого $F_j^i(v_j^i(\cdot)) = f(x_i, t_j, u_j^i, v_j^i(\cdot))$, с кусочно-линейной интерполяцией [15] при $s = 1$ с числом точек разбиения по x равным 10, по t равным 60, на рис. 12 при $s = 0$ с числом точек разбиения по x равным 21, по t равным 60 (в этом случае не выполняется условие устойчивости).

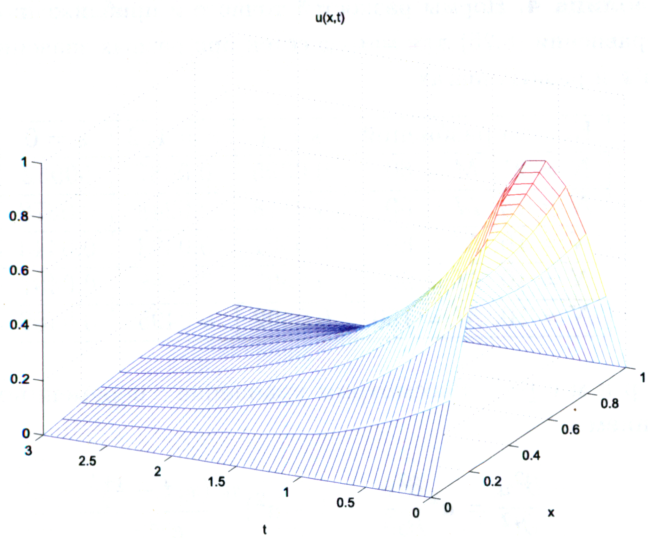


Рис. 11

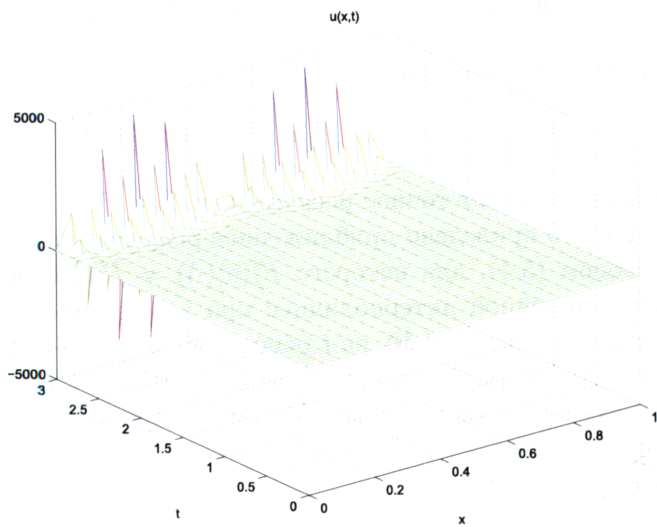


Рис. 12

Таблица 4. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (5.25) для метода сеток при разных значениях параметра s и разных шагах

Кол-во разбиений	$s = 1$	$s = 1/2$	$s = 0$
$N = 21, M = 60$	0.0095	0.0087	59952
$N = 15, M = 60$	0.0118	0.0248	0.0378
$N = 10, M = 60$	0.0527	0.0493	0.0443
$N = 10, M = 90$	0.0507	0.0488	0.0467
$N = 10, M = 150$	0.0502	0.0495	0.0488

Пример 7. Рассмотрим уравнение с переменным запаздыванием:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - a^2) \frac{u^2(x, t - \frac{t+1}{2})}{e^{x+1}} \quad (5.26)$$

при $a = 2$ с начальными

$$u(x, t) = e^{x-t}, \quad -1 \leq t \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = e^{-t}, \quad u(1, t) = e^{1-t}, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Уравнение имеет точное решение $u(x, t) = e^{x-t}$.

На рис. 13 приведено приближенное решение этого уравнения методом (5.4), для которого $F_j^i(v_j^i(\cdot)) = f(x_i, t_j, u_j^i, v_j^i(\cdot))$, с кусочно-линейной интерполяцией при $s = 1$ с числом точек разбиения по x равным 10, по t равным 40, на рис.14 при $s = 0$ с числом точек разбиения по x равным 15, по t равным 40 (в этом случае не выполняется условие устойчивости).

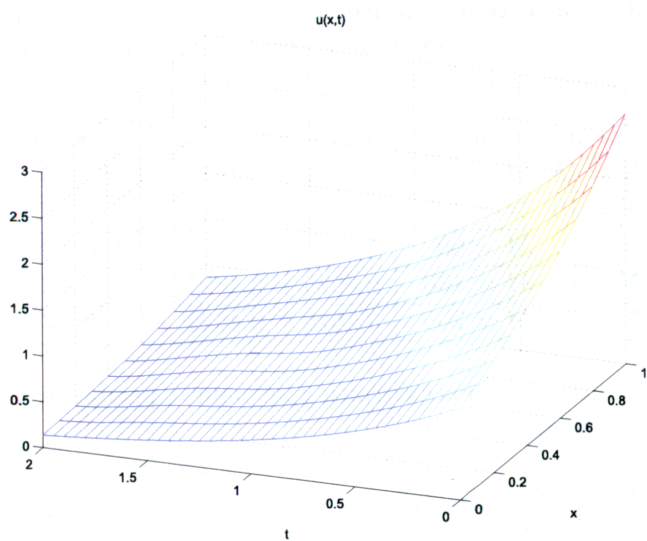


Рис. 13

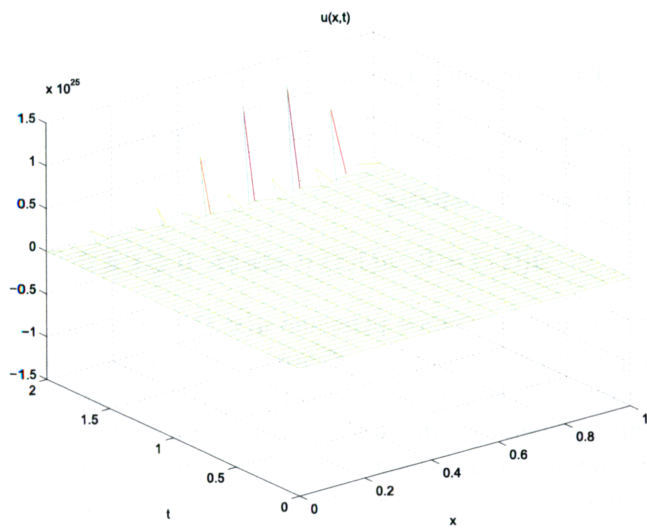


Рис. 14

Таблица 5. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (5.26) для метода сеток при разных значениях параметра s и разных шагах

Кол-во разбиений	$s = 1$	$s = 1/2$	$s = 0$
$N = 15, M = 40$	0.0667	0.4670	$7.888610 \cdot 10^{25}$
$N = 10, M = 40$	0.3265	0.3266	0.3276
$N = 10, M = 60$	0.4646	0.4660	0.4688
$N = 10, M = 100$	0.4625	0.4629	0.4635
$N = 10, M = 200$	0.4626	0.4629	0.4631

Пример 8. Рассмотрим уравнение с распределенным запаздыванием:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\pi^2 x^2 + 2) \cos \pi t - \frac{x^2}{\pi} \left(\sin \pi t - \sin \frac{\pi t}{2} \right) + \int_{-t/2}^0 u(x, t+s) ds \quad (5.27)$$

при $a = 1$ с начальными

$$u(x, t) = x^2 \cos \pi t, \quad -1,5 \leq t \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \cos \pi t, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Уравнение имеет точное решение $u(x, t) = x^2 \cos \pi t$.

На рис. 15 приведено приближенное решение этого уравнения методом (5.4), для которого $F_i^j(v_{i,j}(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_i^j, v_{i,j}(\cdot))$, с кусочно-линейной интерполяцией при $s = 1/2$ с числом точек разбиения по x равным 10, по t равным 90, на рис. 16 при $s = 0$ с числом точек разбиения по x равным 21, по t равным 60 (в этом случае не выполняется условие устойчивости). Интегралы считались по составной формуле Симпсона.

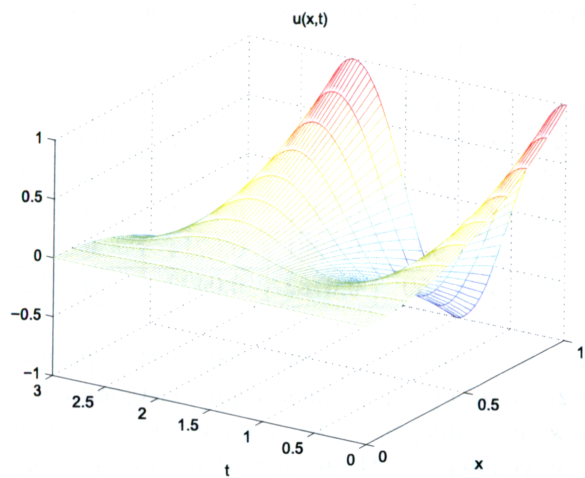


Рис. 15

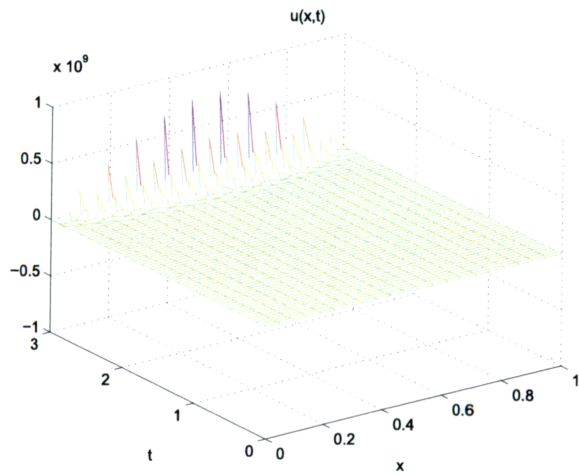


Рис. 16

Таблица 6. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (5.27) для метода сеток при разных значениях параметра s и разных шагах

Кол-во разбиений	$s = 1$	$s = 1/2$	$s = 0$
$N = 21, M = 60$	0.1938	0.1082	$5.0084 \cdot 10^8$
$N = 20, M = 60$	0.1942	0.1085	0.0219
$N = 10, M = 60$	0.1932	0.1081	0.0216
$N = 10, M = 90$	0.1281	0.0714	0.0144
$N = 10, M = 150$	0.0762	0.0423	0.0083

Рассмотренные примеры показывают, что при выполнении условия (5.24) метод (5.4) при некоторых выбранных значениях параметра s дает погрешности, определяемые соотношением шагов. Если условие (5.24) не выполняется, то погрешности резко возрастают (рис. 10, 12, 14).

6. Сеточные методы решения уравнения переноса с наследственностью

В главе рассматриваются численные алгоритмы решения уравнения переноса с эффектом наследственности, проведено исследование условий и порядка их сходимости, проведены расчеты тестовых и модельных задач.

6.1. Постановка задачи

Уравнение переноса — уравнение в частных производных первого порядка, описывающее перенос сохраняющейся скалярной величины в пространстве, обусловленный диффузией. В моделях физики это уравнение часто называют уравнением конвекции, в моделях биологии — уравнением адвекции. Во многих моделях этот эффект может осложняться запаздыванием различных видов [99]. В силу сложности объекта на первый план выходит конструирование численных алгоритмов решения таких уравнений. Численные методы решения уравнения переноса без запаздывания достаточно хорошо изучены, например, см. изложение в учебниках [4, 11, 21, 33]. Общие вопросы для функционально-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка рассматривались в ряде работ, например, в [13]. В данной работе численные методы конструируются с позиции принципа разделения состояния системы на конечномерную и бесконечномерную составляющую. По конечномерной составляющей конструируются аналоги методов, известных для объектов без запаздывания, а для учета предиссии (бесконечномерной составляющей) используется интерполяция с заданными свойствами. Этот подход позволяет эффективно конструировать методы и на основе таких алгоритмов создавать соответствующее программное обеспечение.

Рассмотрим уравнение переноса с эффектом наследственности

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (6.1)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq X$$

с краевым условием

$$u(0, t) = \gamma(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (6.2)$$

и начальным условием

$$u(x, s) = \varphi(x, s), \quad 0 \leq x \leq X, \quad -\tau \leq s \leq 0. \quad (6.3)$$

Здесь x, t – независимые переменные, $u(x, t)$ – искомая функция, $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$ – функция-предыстория искомой функции к моменту t , $\tau > 0$ – величина запаздывания.

Предполагается, что функционал f , функции $\gamma(t)$, $\phi(x, s)$ и константа $a > 0$ таковы, что задача (6.1)–(6.2) имеет единственное решение [99].

В качестве примера можно привести модельный пример динамики популяций клеток из [58]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} [g(x)n(t, x)] = & -\mu(x)n(t, x) - b(x)n(t, x) + \\ & + \frac{2p(y^{-1}(x)b(y^{-1}(x)))}{y'(y^{-1}(x))} n(t - \tau, y^{-1}(x)), \end{aligned}$$

где независимые переменные t – время; x – размер клеток в фазе роста; искомая функция $n(t, x)$ – распределение клеток по размеру; функции $g(x)$, $\mu(x)$, $b(x)$ задают соответственно скорости роста, гибели и перехода в фазу деления, $\tau > 0$ – постоянная длительность фазы деления клетки, $y(x)$ – размер клеток сразу после деления, $p(x)$ – доля клеток, переживших фазу деления.

6.2. Дискретизация задачи

Пусть шаг h по переменной x такой, что $X/h = N$, где N – натуральное, обозначим через $x_i = ih \in [0, X]$, $i = 0, \dots, N$. Пусть шаг Δ по переменной t такой, что $\tau/\Delta = m$, где m – натуральное, пусть $M = \lfloor T/\Delta \rfloor$, обозначим $t_j = j\Delta \in [-\tau, T]$, $j = -m, \dots, M$. Сеткой назовем набор пар $\{x_i, t_j\}$.

Приближения функции $u(x, t)$ в узлах сетки будем обозначать u_j^i . Для каждого фиксированного $i = 0, \dots, N$ введем дискретную предысторию по временным узлам к моменту t_j , $j = 0, \dots, M$:

$$\{u_k\}_j^i = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}.$$

Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение $I: \{u_k^i\}_j \rightarrow v_j^i(\cdot) \in Q[t_j - \tau, t_j + \Delta]$.

Будем предполагать, что, во-первых, оператор интерполяции-экстраполяции липшицев, т. е. найдется такая константа L_I , что для всех предысторий дискретной модели $\{u_k^i\}_j$ и $\{y_k^i\}_j$ выполняется

$$\sup_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |v_j^i(t) - w_j^i(t)| \leq L_I \max_{j - m \leq k \leq j} |u_k^i - y_k^i|,$$

где $v_j^i(\cdot) = I(\{u_k^i\}_j)$, $w_j^i(\cdot) = I(\{y_k^i\}_j)$.

Во-вторых, будем предполагать, что оператор интерполяции-экстраполяции согласован, т. е.

$$v_j^i(t_k) = u_k^i, \quad k = j - m, \dots, j.$$

Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности p на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 , такие, что для всех i, j и $t \in [t_j - \tau, t_{j+1}]$ выполняется неравенство

$$|v_j^i(t) - u(x_i, t)| \leq C_1 \max_{j - m \leq k \leq j} |u_k^i - u(x_i, t_k)| + C_2 \Delta^p. \quad (6.4)$$

Простейший способ интерполяции – кусочно-линейная функция, простейший способ экстраполяции – экстраполяция продолжением, см. главу 3. Образованный таким образом оператор интерполяции-экстраполяции липшицев с константой $L_I = 2$, согласован и имеет второй порядок погрешности.

Для $0 \leq s \leq 1$ рассмотрим семейство методов

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a(s \frac{u_{j+1}^i - u_{j+1}^{i-1}}{h} + (1-s) \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{h}) = F_j^i(v_j^i(\cdot)),$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M-1 \quad (6.5)$$

с соответствующими начальными

$$u_0^i = \varphi(x_i, t_0), \quad i = 0, \dots, N,$$

$$v_j^i(t) = \varphi(x_i, t), \quad t < t_0, \quad i = 0, \dots, N$$

и граничными условиями

$$u_j^0 = \gamma(t_j), \quad j = 0, \dots, M.$$

Здесь $F_j^i(v(\cdot))$ – некоторый функционал, определенный на $Q[-\tau, \Delta]$ и связанный с функционалом $f(x_i, t_j, u_j^i, v(\cdot))$, липшицевый по переменной $v(\cdot)$ с константой L_F .

При всех $0 \leq s \leq 1$ из (6.5) может быть явно выражено u_{j+1}^i в силу условия $a > 0$.

Невязкой метода (6.5) назовем

$$\psi_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} +$$

$$+ a(s \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1})}{h} + (1-s) \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h}) -$$

$$- F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)). \quad (6.6)$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок $h^{p_1} + \Delta^{p_2}$, если существует константа C , что $|\psi_i^j| \leq C(h^{p_1} + \Delta^{p_2})$ для всех $i = 1, \dots, N$, $j = 0, \dots, M-1$.

Обозначим $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$, $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$.

Будем говорить, что метод сходится, если $\varepsilon_j^i \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и $\Delta \rightarrow 0$ для всех $i = 0, \dots, N$ и $j = 0, \dots, M$. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует константа C , такая, что выполняется $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$.

Ниже с помощью определения порядка невязки и путем вложения в общую схему главы 2 конструируются и исследуются методы различных порядков.

6.3. Методы первого порядка. Результаты получены совместно с Л. С. Волканиным

Рассмотрим семейство методов (6.5), в которых функционал F_j^i определяется простейшим способом:

$$F_j^i(v_j^i(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_j^i, v_j^i(\cdot)). \quad (6.7)$$

Заметим, что в этом случае экстраполяция не пужна, а пужна только интерполяция. В случае постоянного сосредоточенного запаздывания, как в примере раздела 6.1, не пужна также интерполяция.

Теорема 11. *Если для точного решения задачи (6.1)–(6.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 2-го порядка включительно, то для любого $0 \leq s \leq 1$ невязка метода (6.5), (6.7) имеет порядок $h + \Delta$.*

Доказательство. Разложим значения точного решения задачи (6.1)–(6.3), входящие в определение невязки, по формуле Тейлора в точке $\{x_i, t_j\}$:

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)\Delta + O(\Delta^2),$$

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + O(h^2),$$

$$u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1}) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + h(O(h) + O(\Delta)).$$

Подставляя эти выражения в определение певязки (6.6), учитывая (6.7) и то, что $u(x_i, t_j)$ — точное решение задачи (6.1)–(6.3) в точке $\{x_i, t_j\}$, получаем

$$\psi_i^j = O(h) + O(\Delta).$$

Сведем метод (6.5) к общей схеме главы 2.

Без ограничения общности будем рассматривать однородные краевые условия

$$\gamma(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

При каждом t_j определим значения дискретной модели вектором $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^N)' \in Y$, здесь Y — векторное пространство размерности $q = N$, ' — знак транспонирования.

Введем в Y две нормы: обычную дискретную

$$\|y_j\| = \sum_{i=1}^N (y_j^i)^2 h$$

и энергетическую [33, с. 331]

$$\|y_j\|_{(1)} = \sum_{i=1}^N \frac{(y_j^i - y_j^{i-1})^2}{h}.$$

В пространстве Y введем оператор A :

$$Au_j^i = a \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{h},$$

тогда систему (6.5) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + sAy_{j+1} + (1-s)Ay_j = F_j(v(\cdot)), \quad (6.8)$$

где $F_j(v(\cdot)) = (F_j^1(v_j^1(\cdot)), F_j^2(v_j^2(\cdot)), \dots, F_j^N(v_j^N(\cdot)))'$,
 $v(\cdot) = I(\{y_k\}_j) \in Q^q[-\tau, \Delta]$. Здесь $V = Q^q[-\tau, \Delta]$ — интерполяционное пространство, пространство q -мерных вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит пространству $Q[-\tau, \Delta]$.

Так как при любом допустимом весе s уравнение (6.8) разрешимо относительно y_{j+1} , то можно привести уравнение (6.8) к явной форме

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta \Phi(t_j, I(\{y_k\}_j), \Delta), \quad (6.9)$$

где оператор перехода определяется формулой

$$S = (E + s\Delta A)^{-1}(E + (s-1)\Delta A),$$

функция продвижения на шаг формулой

$$\Phi(t_j, v, \Delta) = (E + s\Delta A)^{-1}F_j(v(\cdot)).$$

Исследуем устойчивость полученной схемы. Для этого наряду с уравнениями (6.5), (6.9) рассмотрим однородную разностную схему в формах

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a(s \frac{u_{j+1}^i - u_{j+1}^{i-1}}{h} + (1-s) \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{h}) = 0, \\ i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M-1, \quad (6.10)$$

$$y_{j+1} = Sy_j. \quad (6.11)$$

Схема (6.10) хорошо изучена, например, в работе [33, с. 331] приведены условия, гарантирующие ее устойчивость в энергетической норме.

$$s \geq \frac{1}{2} - \frac{h}{2a\Delta}. \quad (6.12)$$

Определим функцию точных значений соотношениями

$$z_j = (u(x_1, t_j), u(x_2, t_j), \dots, u(x_N, t_j))' \in Y.$$

Стартовые значения модели можно взять равные функции точных значений:

$$y_j = z_j = (\varphi(x_1, t_j), \varphi(x_2, t_j), \dots, \varphi(x_N, t_j))', \quad j = -m, \dots, 0.$$

Определение невязки (2.6) в общей схеме содержит интерполяцию и отличается от введенного определения невязки без интерполяции (6.6). Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 12. Пусть невязка в смысле (6.6) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_j^i липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I имеет порядок погрешности p_0 на точном решении, тогда невязка с интерполяцией в смысле (2.6) имеет порядок погрешности $\Delta^{\min\{p_0, p_1\}} + h^{p_2}$.

Доказательство. Каждая компонента невязки в смысле (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} d_j^i &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} + \\ &+ a(s \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1})}{h} + (1-s) \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h}) - \\ &- F_j^i(w_j^i(\cdot)), \end{aligned} \quad (6.13)$$

где $w_j^i(\cdot) = I(\{u(x_i, t_k)\}_j)$ — результат действия оператора интерполяции-экстраполяции на предысториих точного решения в узлах.

Таким образом, получаем

$$d_j^i = \psi_j^i + F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)) - F_j^i(w_j^i(\cdot)). \quad (6.14)$$

Используя липшицевость F_j^i , определение (6.4) порядка оператора интерполяции-экстраполяции и его согласованность, получаем оценку

$$|F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)) - F_j^i(w_j^i(\cdot))| \leq L_F \sup_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |u(x_i, t) - w(x_i, t)| \leq$$

$$\leq L_F(C_1 \max_{j-m \leq k \leq j} |u(x_i, t_k) - w(x_i, t_k)| + C_2 \Delta^{p_0}) \leq L_F C_2 \Delta^{p_0}. \quad (6.15)$$

Из (6.14) и (6.15) вытекает утверждение теоремы.

В частности, при условиях теоремы 12 метод (6.5), (6.7) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок невязки в смысле (2.6), равный $h + \Delta$.

Вложение в общую разностную схему с последствием проведено, откуда, используя теорему 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 13. Пусть выполнено условие устойчивости (6.12), для точного решения задачи (6.1)–(6.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 2-го порядка включительно, тогда метод (6.5), (6.7) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением сходится с порядком $h + \Delta$.

Заметим, что среди устойчивых методов порядка $h + \Delta$ самым простым и эффективным является метод, получающийся при $s = 1$:

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a \frac{u_{j+1}^i - u_{j+1}^{i-1}}{h} = f(t_j, x_i, u_j^i, v_j^i(\cdot)). \quad (6.16)$$

6.4. Методы второго порядка по пространственной переменной. Результаты получены С. И. Солодушкиным

Рассмотрим задачу (6.1)–(6.3) и, используя обозначения предыдущего параграфа, построим схему второго порядка по пространственному шагу h .

Обозначим $f_j^i = f(x_i, t_j, u_j^i, v_j^i(\cdot))$ — значение функционала f , вычисленное на приближенном решении, $v_j^i(\cdot)$ — результат кусочно-линейной интерполяции, $\dot{\gamma}_j = \frac{d\gamma(t)}{dt} \Big|_{t=t_j}$. Для постро-

ения численного метода мы дополнительно предполагаем, что $\gamma(t)$ дифференцируемая.

В уравнении (6.1) производную $\partial u / \partial t$ аппроксимируем конечной разностью по двум узлам. Для узлов (x_i, t_j) , $i = 2, \dots, N$, $j = 0, \dots, M-1$, производная $\partial u / \partial x$ аппроксимируется конечной разностью по трем узлам на правый край. Для $i = 1$ такая аппроксимация потребовала бы использования u_j^{-1} , поэтому для $i = 1$ применяется аппроксимация по трем узлам с кратным узлом (x_0, t_j) .

$$\frac{\partial u_j^1}{\partial x} \approx \frac{-4u_j^0 - 2h \partial u_j^0 / \partial x + 4u_j^1}{2h}.$$

В силу (6.1) имеем $\frac{\partial u_j^0}{\partial x} = \frac{1}{a} \left(f_j^0 - \frac{\partial u_j^0}{\partial t} \right)$, в силу (6.3) имеем

$$\frac{\partial u_j^0}{\partial x} = \frac{1}{a} (f_j^0 - \dot{\gamma}_j).$$

Для $0 \leq s \leq 1$ рассмотрим семейство методов: для всякого $j = 0, \dots, M-1$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{j+1}^1 - u_j^1}{\Delta} + a \left(s \frac{-4u_{j+1}^0 - \frac{2h}{a} (f_{j+1}^0 - \dot{\gamma}_{j+1}) + 4u_{j+1}^1}{2h} + \right. \\ & \quad \left. + (1-s) \frac{-4u_j^0 - \frac{2h}{a} (f_j^0 - \dot{\gamma}_j) + 4u_j^1}{2h} \right) = f_j^1, \\ & \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a \left(s \frac{u_{j+1}^{i-2} - 4u_{j+1}^{i-1} + 3u_{j+1}^i}{2h} + \right. \\ & \quad \left. + (1-s) \frac{u_j^{i-2} - 4u_j^{i-1} + 3u_j^i}{2h} \right) = f_j^i, \quad i = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (6.17)$$

с начальным условием

$$u_0^i = \varphi(x_i, 0), \quad i = 0, \dots, N,$$

$$v_j^i(t) = \varphi(x_i, t), \quad t < 0, \quad i = 0, \dots, N$$

и граничным условием

$$u_j^0 = \gamma_0(t_j), \quad j = 0, \dots, M.$$

Заметим, во-первых, что метод явный, т. е. при любом s можно выразить u_{j+1}^i . Во-вторых, экстраполяция в методе не нужна, а применяется лишь интерполяция, в данном случае кусочно-линейная.

Невязкой метода (6.17) назовем сеточную функцию

$$\begin{aligned} \psi_j^1 &= \frac{u(x_1, t_{j+1}) - u(x_1, t_j)}{\Delta} + \\ &+ as \frac{-4u(x_0, t_{j+1}) - \frac{2h}{a}(f_{j+1}^0 - \dot{g}_{j+1}) + 4u(x_1, t_{j+1})}{2h} + \\ &+ a(1-s) \frac{-4u(x_0, t_j) - \frac{2h}{a}(f_{j+1}^0 - \dot{g}_j) + 4u(x_1, t_j)}{2h} - \bar{f}_j^1, \\ \psi_j^i &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} + \\ &+ as \frac{u(x_{i-2}, t_{j+1}) - 4u(x_{i-1}, t_{j+1}) + 3u(x_i, t_{j+1})}{2h} + \\ &+ a(1-s) \frac{u(x_{i-2}, t_j) - 4u(x_{i-1}, t_j) + 3u(x_i, t_j)}{2h} - \bar{f}_j^i, \\ &i = 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Здесь $\bar{f}_j^i = f(x_i, t_j, u(x_i, t_j), u_{t_j}(x_i, \cdot))$ — значение функции f , вычисленное на точном решении.

Теорема 14. Пусть точное решение $u(x, t)$ задачи (6.1)–(6.3) трижды непрерывно дифференцируемо по x , дважды непрерывно дифференцируемо по t , первая производная решения по x непрерывно дифференцируема по t . Тогда невязка метода (6.17) имеет порядок $h^2 + \Delta$.

Доказательство. Невязка определяется равенствами (6.18). Разложим функцию $u(x, t)$ в окрестности точек (x_i, t_j) и (x_i, t_{j+1}) , $i = 2, \dots, N$, получим следующие равенства для значений функции в точках:

$$\begin{aligned}
 u(x_{i-1}, t_j) &= u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)h^2 + O(h^3), \\
 u(x_{i-2}, t_j) &= u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)2h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)4h^2 + O(h^3), \\
 u(x_{i-1}, t_{j+1}) &= u(x_i, t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 + O(h^3), \\
 u(x_{i-2}, t_{j+1}) &= u(x_i, t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})2h + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})4h^2 + O(h^3), \\
 u(x_i, t_{j+1}) &= u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)\Delta + O(\Delta^2).
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу для ψ_j^i , получим

$$\begin{aligned}
 \psi_j^i &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + O(\Delta) + as\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1}) + O(h^2)\right) + \\
 &\quad + a(1-s)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + O(h^2)\right) - \bar{f}_j^i.
 \end{aligned}$$

Используя разложение

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1}) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + O(\Delta),$$

получаем формулу для невязки

$$\psi_j^i = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + O(h^2) + O(\Delta) - \bar{f}_j^i.$$

Отсюда, в силу уравнения (6.1), получаем $\psi_j^i = O(h^2 + \Delta)$.

Для случая $i = 1$ результат доказывается аналогично.

Далее будем рассматривать задачи с однородным граничным условием $u(0, t) = 0$, $t \in [0, T]$. К такой задаче можно свести исходную задачу с помощью замены $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - \gamma(t)$.

Введем в рассмотрение вектор $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^N)' \in Y$, $j = 0, \dots, M-1$, где знак $'$ означает транспонирование, Y — векторное пространство с нормой

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2.$$

На пространстве Y определим оператор A , заданный матрицей

$$A = \frac{a}{2h} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

тогда метод (6.17) можно переписать в виде

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + sA y_{j+1} + (1-s)A y_j = F_j, \quad (6.19)$$

здесь $F_j = (f_j^1 + s f_{j+1}^0 + (1-s)f_j^0, f_j^2, \dots, f_j^N)'$.

Воспользуемся тождеством

$$y_{j+1} = y_j + \Delta \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta}$$

и введем оператор

$$B = E + s\Delta A$$

(E — тождественный оператор), тогда уравнение (6.19) можно записать как двухслойную разностную схему в канонической форме [33]:

$$B \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + A y_j = F_j. \quad (6.20)$$

Оператор A является положительно определенным с собственными числами $\lambda_1(A) = 8h/a$, $\lambda_2(A) = \dots = \lambda_n(A) = 6h/a$, следовательно, B положительно определенный. Поскольку B обратим, можно записать (6.20) в виде

$$y_{j+1} = S y_j + \Delta B^{-1} F_j, \quad (6.21)$$

где $S = (E - \Delta B^{-1} A)$ — оператор перехода в общей схеме (2.3).

Введем энергетическую норму в пространстве Y :

$$\|y\|_Y = \sqrt{(Ay, y)}.$$

Следуя определению главы 2, назовем разностную схему (6.21) устойчивой, если $\|S\|_Y \leq 1$, здесь норма оператора подчинена энергетической норме вектора.

Теорема 15. Пусть выполнено условие $s \geq \frac{1}{2}$, тогда разностная схема (6.21) является устойчивой.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (6.21) в канонической форме (6.20) и применим методы проверки устойчивости двухслойной разностной схемы [33].

Проведем симметризацию в уравнении (6.20), домножив обе части уравнения на A^{-1} , получим

$$(A^{-1} + s\Delta E) \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + E y_j = A^{-1} F_j.$$

Обозначив $\hat{B} = A^{-1} + s\Delta E$, $\hat{A} = E$, $\hat{F}_j = A^{-1} F_j$, получим

$$\hat{B} \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + \hat{A} y_j = \hat{F}_j. \quad (6.22)$$

Для устойчивости в энергетической норме однородной схемы, соответствующей методу (6.22), необходимо и достаточно ([33], с. 359, теорема 1), чтобы $\hat{B} \geq \frac{\Delta}{2} \hat{A}$. Это эквивалентно $A^{-1} + \Delta E(s - 0.5) \geq 0$. Поскольку A^{-1} положительно определенный, последнее неравенство выполняется для любых Δ , если $s \geq 0.5$.

Определение невязки (2.6) в общей схеме содержит интерполяцию и отличается от введенного определения невязки без интерполяции (6.18). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 16. *В условиях теоремы 14 невязка в смысле (2.6) метода (6.17) с кусочно-линейной интерполяцией имеет порядок $h^2 + \Delta$.*

Проверка утверждения проводится подобно доказательству теоремы 12 с учетом утверждения теоремы 14 и того, что кусочно-линейная интерполяция имеет второй порядок погрешности по Δ .

Из теоремы 1, используя теоремы 16 и 15, получаем следующие утверждение.

Теорема 17. *Пусть выполнено условие устойчивости $s \geq \frac{1}{2}$, точное решение $u(x, t)$ задачи (6.1)–(6.3) трижды непрерывно дифференцируемо по x , дважды непрерывно дифференцируемо по t , первая производная решения по x непрерывно дифференцируема по t , тогда метод (6.17) с кусочно-линейной интерполяцией сходится, причем порядок сходимости $h^2 + \Delta$.*

Пример 9.

Рассмотрим тестовое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = \cos x \cos t - u(x, t - \pi/2) \quad (6.23)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = \sin x \cos t, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad -\pi/2 \leq t \leq 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Эта краевая задача имеет точное решение $u(x, t) = \sin x \cos t$.

В табл. 7 приведены значения максимального отклонения $\varepsilon = \max_{i,j} |u_j^i - u(x_i, t_j)|$ точного решения от приближенного в узлах сетки, вычисленного методом (6.17) при $s = 0.8$.

Таблица 7. Максимум модуля разности точного и приближенного решений уравнения (6.23) при разных шагах

№	h	Δ	ε
1	$\pi/10$	$\pi/20$	0.0782
2	$\pi/20$	$\pi/20$	0.0971
3	$\pi/20$	$\pi/40$	0.0469
4	$\pi/40$	$\pi/40$	0.0515
5	$\pi/10$	$\pi/400$	0.0421
6	$\pi/20$	$\pi/400$	0.0144
7	$\pi/40$	$\pi/400$	0.0049
8	$\pi/80$	$\pi/400$	0.0051

В экспериментах № 5–7 погрешность, обусловленная дискретизацией по времени, мала в сравнении с погрешностью, обусловленной дискретизацией по координате; анализ поведения погрешности показывает квадратичную сходимость по x — уменьшение шага в два раза приводит к уменьшению погрешности более чем в два раза.

Анализ таблицы показывает, что только согласованное уменьшение шагов приводит к уменьшению погрешности. Так, в экспериментах № 7–8 уменьшение h в два раза не приводит к соответствующему уменьшению погрешности, так как общая погрешность уже в большей степени обусловлена дискретизацией по времени.

По теореме 15 для $s = 0.8$ схема (6.20) является устойчивой при любом соотношении шагов, однако, в силу некорректности операции численного дифференцирования, при уменьшении h

аппроксимация $\partial u / \partial x$ в (6.17) становится более чувствительной к ошибкам машинного округления, что приводит к росту погрешности. Согласованное с h уменьшение Δ является своего рода регуляризатором, который не позволяет вычислительным ошибкам расти и накапливаться. Эксперименты № 1–4 служат тому иллюстрацией.

6.5. Метод второго порядка по временной переменной

Как показывает теорема 11, невязка семейства методов (6.5) с условием (6.7) имеет порядок $h + \Delta$ и, следовательно, по теореме 17 при условии устойчивости (6.12) сходятся с порядком $h + \Delta$. В этом разделе среди методов вида (6.5) строится метод порядка $h + \Delta^2$, который можно назвать аналогом метода Кранка–Никольсона, так как в формуле (6.5) выберем вес

$$s = \frac{1}{2}. \quad (6.24)$$

В этом методе вместо условия (6.7) положим

$$F_j^i(v_j^i(\cdot)) = f(t_{j+\frac{1}{2}}, x_i, u_{j+\frac{1}{2}}^i, v_{j+\frac{1}{2}}^i(\cdot)), \quad (6.25)$$

где $t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + h/2$ — полущелая точка, $v_{j+\frac{1}{2}}^i(\cdot)$ — результат действия оператора кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением в этой точке (в отличие от (6.7) здесь экстраполяция нужна по существу), $u_{j+\frac{1}{2}}^i = v_j^i(t_{j+\frac{1}{2}})$.

Теорема 18. Если для точного решения задачи (6.1)–(6.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно, то невязка метода (6.5), (6.24), (6.25) имеет порядок $h + \Delta^2$.

Доказательство. Невязка метода определяется соотношением

$$\psi_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} +$$

$$+ \frac{a}{2} \left(\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1})}{h} + \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right) - \bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad (6.26)$$

где $\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^i = f(t_{j+\frac{1}{2}}, x_i, u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), u_{t_{j+\frac{1}{2}}}(x_i, \cdot))$.

Подставим в первую дробь (6.26) разложения

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta^2}{8} + O(\Delta^3),$$

$$u(x_i, t_j) = u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta^2}{8} + O(\Delta^3),$$

во вторую и в третью разложения

$$u(x_{i-1}, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + O(h^2),$$

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + O(h^2),$$

получим

$$\begin{aligned} \psi_j^i &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta^2) + O(h) + \\ &+ \frac{a}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \right) - \bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^i. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Но при условиях теоремы

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = 2 \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + O(h),$$

поэтому

$$\psi_j^i = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) - \bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^i + O(\Delta^2) + O(h). \quad (6.28)$$

Так как $u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$ — точное решение задачи (6.1) в точке $(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$, то отсюда вытекает заключение теоремы.

В разделе 6.3 для доказательства сходимости определения порядка сходимости рассматриваемое в этом разделе семейство методов вкладывается в общую схему главы 2. Так как метод (6.5), (6.24), (6.25) является частным случаем этого семейства, то подобно теореме 13 проверяется следующее утверждение.

Теорема 19. *Если для точного решения задачи (6.1)–(6.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно, то метод (6.5), (6.24), (6.25) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок сходимости $h + \Delta^2$.*

Отметим два существенных момента. Во-первых, в этом методе, в отличие от всех других рассмотренных в этой главе методов требуются интерполяция и экстраполяция второго порядка, а в других методах можно было обойтись интерполяцией первого порядка, например, кусочно-постоянной. Во-вторых, вес метода $s = \frac{1}{2}$ удовлетворяет условию устойчивости (6.12).

6.6. Метод второго порядка по временной и пространственной переменной. Результаты получены совместно со С. В. Свиридовым

Для однородных линейных уравнений, соответствующих (6.1), (т. е. в которых $f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)) \equiv 0$) в классе методов (6.5) существует метод порядка $h^2 + \Delta^2$ [33, с. 331], если

$$s = \frac{1}{2} - \frac{h}{2a\Delta}. \quad (6.29)$$

Однако для нелинейного уравнения с наследственностью (6.1), для того, чтобы построить аналог этого метода, нужно вычислять f в точках, являющихся полуцелыми узлами не только по переменной t , как в предыдущем методе, но и в полуцелых точках по переменной x . Это требование приводит фактически к необходимости двумерной интерполяции, т. е. не только интерполяции и экстраполяции дискретной предыстории по времени, но и интерполяции временной предыстории по пространству. Рассмотрим простейший способ, необходимый для конструирования метода.

Расширим понятие оператора интерполяции-экстраполяции до следующего: двойным оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение $I: (\{u_k\}_j^{i-1}, \{u_k^i\}_j) \rightarrow v_j^{i-\frac{1}{2}}(\cdot) \in Q[t_j - \tau, t_j + \Delta]$.

Приведем конструкцию двойного оператора интерполяции-экстраполяции, обладающую нужными в методе свойствами. Пусть известны две дискретные предыстории $\{u_k\}_j^i = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$, и $\{u_k\}_j^{i-1} = \{u_k^{i-1}, j - m \leq k \leq j\}$. Определим предысторию между узлами

$$\{u_k\}_j^{i-\frac{1}{2}} = \{u_k^{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_k^i + u_k^{i-1}}{2}, j - m \leq k \leq j\} \quad (6.30)$$

и проведем через эти точки кусочно-линейную интерполяцию

$$v_j^{i-\frac{1}{2}}(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((t_k - t_j - s)u_{k-1}^{i-\frac{1}{2}} + (t_j + s - t_{k-1})u_k^{i-\frac{1}{2}}),$$

$$t_{k-1} \leq t_j + s \leq t_k \quad (6.31)$$

с экстраполяцией продолжением

$$v_j^{i-\frac{1}{2}}(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((-s)u_{j-1}^{i-\frac{1}{2}} + (\Delta + s)u_j^{i-\frac{1}{2}}),$$

$$t_j \leq t_j + s \leq t_{j+1}. \quad (6.32)$$

Теорема 20. *Если точное решение задачи (6.1)–(6.3) дважды непрерывно дифференцируемо по совокупности переменных, то двойной оператор интерполяции-экстраполяции (6.31) (6.32) имеет порядок погрешности $h^2 + \Delta^2$ на точном решении, т.е. найдутся константы C_1 и C_2 , такие, что для всех $i = 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, M - 1$, и $t \in [t_j - \tau, t_{j+1}]$ выполняется неравенство*

$$|v_j^{i-\frac{1}{2}}(t) - u(x_i - h/2, t)| \leq C_1(\max_{j-m \leq k \leq j} |u_k^{i-1} - u(x_{i-1}, t_k)| +$$

$$+ \max_{j-m \leq k \leq j} |u_k^i - u(x_i, t_k)|) + C_2(h^2 + \Delta^2). \quad (6.33)$$

Доказательство. Пусть в (6.33) зафиксированный момент t принадлежит отрезку $[t_{k-1}, t_k]$, где k одно из целых чисел от $j - m + 1$ до j (случай интерполяции).

Тогда

$$\begin{aligned} & |v_j^{i-\frac{1}{2}}(t) - u(x_i - h/2, t)| \leq \\ & \leq |v_j^{i-\frac{1}{2}}(t) - w_t^{i-\frac{1}{2}}| + |w_t^{i-\frac{1}{2}}(t) - u(x_i - h/2, t)|, \end{aligned} \quad (6.34)$$

где $w^{i-\frac{1}{2}}(t)$ – результат двойной интерполяции, подобной (6.30), (6.31) точного решения $u(x, t)$:

$$w_l^{i-\frac{1}{2}} = \frac{u(x_i, t_l) + u(x_{i-1}, t_l)}{2}, \quad l = k - 1, k, \quad (6.35)$$

$$w^{i-\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{\Delta}((t_k - t)w_{k-1}^{i-\frac{1}{2}} + (t - t_{k-1})w_k^{i-\frac{1}{2}}). \quad (6.36)$$

Из (6.31) и (6.36) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & |v^{i-\frac{1}{2}}(t) - w_t^{i-\frac{1}{2}}| \leq \\ & \leq 2 \max\{|u_{k-1}^{i-\frac{1}{2}} - w_{k-1}^{i-\frac{1}{2}}|, |u_k^{i-\frac{1}{2}} - w_k^{i-\frac{1}{2}}|\}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Из (6.30) и (6.33) следует

$$\begin{aligned} & |u_l^{i-\frac{1}{2}} - w_l^{i-\frac{1}{2}}| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \max\{|u_l^{i-1} - u(x_{i-1}, t_l)|, |u_l^{i-1} - u(x_{i-1}, t_l)|\}, \quad l = k - 1, k, \end{aligned} \quad (6.38)$$

таким образом, оценки (6.37) и (6.38) дают

$$\begin{aligned} & |v_j^{i-\frac{1}{2}}(t) - w^{i-\frac{1}{2}}(t)| \leq \max\{|u_{k-1}^{i-1} - u(x_{i-1}, t_{k-1})|, \\ & |u_k^{i-1} - u(x_{i-1}, t_k)|, |u_{k-1}^i - u(x_i, t_{k-1})|, |u_k^i - u(x_i, t_k)|\}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (6.38)

$$|w^{i-\frac{1}{2}}(t) - u(x_i - h/2, t)| \leq$$

$$\leq |w^{i-\frac{1}{2}}(t) - z(x_i - h/2, t)| + |z(x_i - h/2, t) - u(x_i - h/2, t)|, \quad (6.40)$$

где $z(x_i - h/2, t)$ – результат кусочно-линейной интерполяции точного решения в полуцелых узлах:

$$z(x_i - h/2, t) = \frac{1}{\Delta}((t_k - t)u(x_i - h/2, t_{k-1}) + (t - t_{k-1})u(x_i - h/2, t_k)). \quad (6.41)$$

Если точное решение дважды непрерывно дифференцируемая функция, то, во-первых:

$$|z(x_i - h/2, t) - u(x_i - h/2, t)| \leq O(\Delta^2). \quad (6.42)$$

Во-вторых, в силу (6.36), (6.41) и (6.35) выполняется

$$\begin{aligned} |w^{i-\frac{1}{2}}(t) - z(x_i - h/2, t)| &\leq 2 \max\{|w_{k-1}^{i-\frac{1}{2}} - u(x_i - h/2, t_{k-1})|, \\ &|w_k^{i-\frac{1}{2}} - u(x_i - h/2, t_{k-1})|\} \leq O(h^2). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Из (6.40), (6.42) и (6.43) следует

$$|w^{i-\frac{1}{2}}(t) - u(x_i - h/2, t)| \leq O(h^2 + \Delta^2). \quad (6.44)$$

Оценки (6.34), (6.39) и (6.44) дают утверждение теоремы в случае $t \in [t_j - \tau, t_j]$. Случай интерполяции $t \in [t_j, t_j + \Delta]$ разбирается аналогично. Отличие состоит в том, что нужно заменить индекс по t с k на j , и в том, что оценка (6.37) примет вид

$$|v^{i-\frac{1}{2}}(t) - w_t^{i-\frac{1}{2}}| \leq 3 \max\{|u_{j-1}^{i-\frac{1}{2}} - w_{j-1}^{i-\frac{1}{2}}|, |u_j^{i-\frac{1}{2}} - w_j^{i-\frac{1}{2}}|\}.$$

Рассмотрим метод

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a(s \frac{u_{j+1}^i - u_{j+1}^{i-1}}{h} + (1-s) \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{h}) &= \\ &= f(t_{j+\frac{1}{2}}, x_{i-h/2}, v_{j+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}, v_{j+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}(\cdot)), \\ i &= 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (6.45)$$

в котором параметр s определяется условием (6.29), значение приближения искомой функции между узлами формулой (6.30), а результат двойной интерполяции-экстраполяции формулами (6.30), (6.31), (6.32). Метод дополняется соответствующими начальными и граничными условиями.

Теорема 21. *Если для точного решения задачи (6.1)–(6.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно, то невязка (без интерполяции) метода (6.45), (6.29), (6.30) имеет порядок $h^2 + \Delta^2$.*

Доказательство. Невязка метода определяется соотношением

$$\begin{aligned} \psi_j^i &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} + \\ &+ a(s \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1})}{h} + (1-s) \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h}) - \\ &\quad - \bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

где s определяется соотношением (6.29), а

$$\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} = f(t_{j+\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, u(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}), u_{t_{j+\frac{1}{2}}}(x_{i-\frac{1}{2}}, \cdot)).$$

Подставим в первую дробь (6.46) разложения

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{j+1}) &= u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta}{2} + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta^2}{8} + O(\Delta^3), \end{aligned}$$

$$u(x_i, t_j) = u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta^2}{8} + O(\Delta^3),$$

во вторую и в третью разложения

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+1}) \frac{h}{2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+1}) \frac{h^2}{8} + O(h^3), \\
u(x_{i-1}, t_{j+1}) &= u(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+1}) \frac{h}{2} + \\
& + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+1}) \frac{h^2}{8} + O(h^3), \\
u(x_i, t_j) &= u(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j) \frac{h}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j) \frac{h^2}{8} + O(h^3), \\
u(x_{i-1}, t_j) &= u(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j) \frac{h}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j) \frac{h^2}{8} + O(h^3),
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
\psi_j^i &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta^2) + O(h^2) + \\
& + as \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+1}) + a(1-s) \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j) - \bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}. \quad (6.47)
\end{aligned}$$

Подставим в это выражение разложения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{h}{2} + O(h^2), \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+1}) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta}{2} + O(\Delta^2), \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta}{2} + O(\Delta^2).
\end{aligned}$$

Так как $u(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}})$ — точное решение задачи (6.1) в точке $(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}})$, то получаем

$$\psi_j^i = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) \left(\frac{h}{2} + a(2s-1) \frac{\Delta}{2} \right) + O(\Delta^2) + O(h^2).$$

Так как параметр s выбирается из условия (6.29), откуда следует утверждение теоремы.

Для определения порядка сходимости этого метода проведем сведение его к общей схеме, так же, как это сделано в разделе 6.3. Отличие состоит в том, что функция F_j^i определяется не соотношением (6.7), а соотношением

$$F_j^i(v_j^{i-\frac{1}{2}}(\cdot)) = f(t_{j+\frac{1}{2}}, x_{i-h/2}, v_{j+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}, v_{j+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}(\cdot)). \quad (6.48)$$

Подобно теореме 12, но с учетом теоремы 20 проверяется следующее утверждение.

Теорема 22. *В условиях теоремы 21 невязка с интерполяцией в смысле (2.6) метода (6.45), (6.29), (6.30), (6.31), (6.32) имеет порядок $h^2 + \Delta^2$.*

Из вложения в общую разностную схему с последствием, теоремы 22 и того факта, что при (6.29) выполняется условие устойчивости, вытекает следующее утверждение.

Теорема 23. *Пусть для точного решения задачи (6.1)–(6.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно, тогда метод (6.45), (6.29), (6.30), (6.31), (6.32) сходится с порядком $h^2 + \Delta^2$.*

6.7. Численные эксперименты. Результаты получены совместно со С. В. Свиридовым

Пример 10. Тестовый пример.

Рассмотрим следующее уравнение с постоянным запаздыванием по переменной t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \sin \pi x + \pi t \cos \pi x - (t - \tau) \sin \pi x + u(x, t - \tau), \quad (6.49)$$

при $x \in [0, 2]$, $t \in [0, 1]$, $\tau = 1$ с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, t) = t \sin \pi x, \quad t \in [-\tau, 0], \quad u(0, t) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

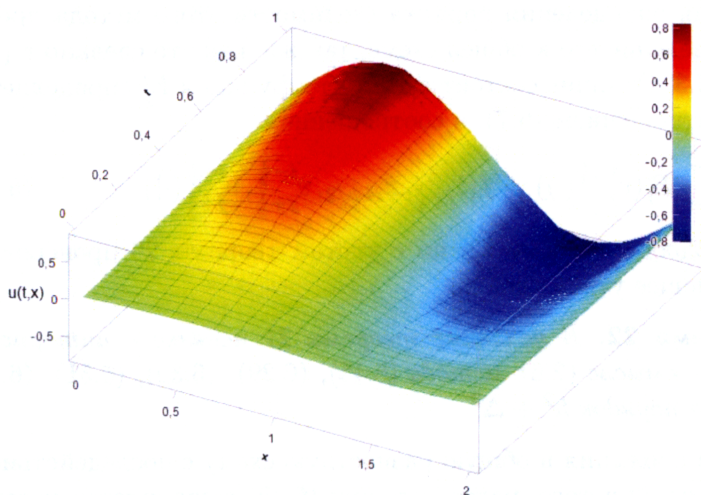


Рис. 17. Приближенное решение уравнения (6.49), полученное аналогом метода Кранка–Никольсона при $h = \Delta = 0.05$

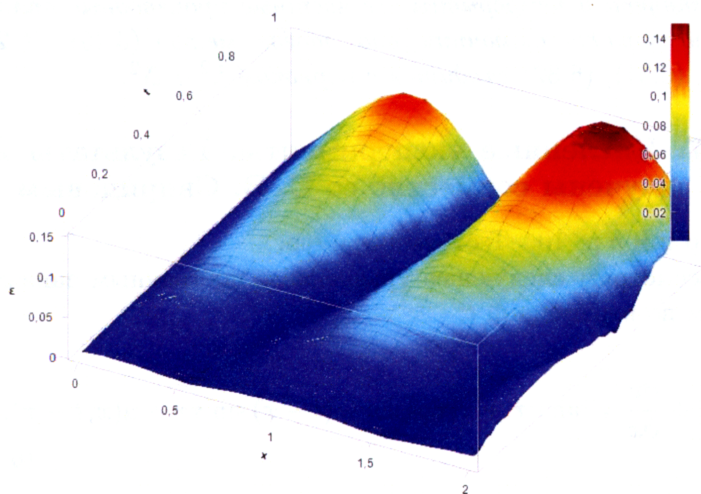


Рис. 18. Модуль разности приближенного и точного решений уравнения (6.49)

Данное уравнение имеет точное решение: $u(x, t) = t \sin \pi x$.

На рис. 17 приведено приближенное решение данного уравнения аналогом метода Кранка–Никольсон при числе точек разбиения по x , равном 40, по t — 20. На рис. 18 изображен модуль разности точного и указанного приближенного решений.

Таблица 8. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (6.49) при разных шагах для методов: 1) схема бегущего счета, 2) аналог схемы Кранка–Никольсон, 3) схема аппроксимации на середину квадрата

Шаги	Метод 1	Метод 2	Метод 3
$h = 0.05, \Delta = 0.05$	0.14299	0.15176	0.05476
$h = 0.025, \Delta = 0.05$	0.11907	0.12796	∞
$h = 0.05, \Delta = 0.025$	0.11422	0.11680	0.06507
$h = 0.05, \Delta = 0.0125$	0.10151	0.10237	0.06135
$h = 0.025, \Delta = 0.0125$	0.06208	0.06287	0.03434
$h = 0.0125, \Delta = 0.00625$	0.03243	0.03265	0.01766
$h = 0.00313, \Delta = 0.00625$	0.01777	0.01796	∞

Как видно из табл. 8, схемы бегущего счета и Кранка–Никольсон показывают примерно одинаковые результаты. Метод аппроксимации на середину квадрата показывает лучшие результаты, но при малых шагах является неустойчивым к вычислительной погрешности. Этот факт можно объяснить тем, что параметр s в нем выбирается из условия (6.29), что является границей зоны устойчивости (6.12).

Пример 11.

Рассмотрим тестовое уравнение с переменным запаздыванием по переменной t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x, t)}{u(x, \frac{t}{2})} - e^{-\frac{t}{2}}, \quad (6.50)$$

при $x \in [0, 2], t \in [0, 1], a = 1$ с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, 0) = e^x, x \in [0, 2], \quad u(0, t) = e^{-t}, t \in [0, 1].$$

Данное уравнение имеет точное решение: $u(x, t) = e^{x-t}$. На рис. 19 можно увидеть абсолютную погрешность решения уравнения, полученного схемой аппроксимации на середину квадрата.

Таблица 9. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (6.50) при разных шагах для методов: 1) схема бегущего счета, 2) аналог схемы Кранка–Никольсон, 3) схема аппроксимации на середину квадрата

Шаги	Метод 1	Метод 2	Метод 3
$h = 0.05, \Delta = 0.05$	0.13478	0.04825	0.02429
$h = 0.025, \Delta = 0.05$	0.10373	0.01667	∞
$h = 0.05, \Delta = 0.025$	0.10246	0.05843	0.07311
$h = 0.05, \Delta = 0.0125$	0.08595	0.06379	0.08634
$h = 0.025, \Delta = 0.0125$	0.05291	0.03011	0.03731
$h = 0.0125, \Delta = 0.00625$	0.02688	0.01529	0.01885
$h = 0.00313, \Delta = 0.00625$	0.01357	0.00223	∞

Эксперименты показывают уменьшение погрешности методов при увеличении количества шагов и уже отмеченную в предыдущем примере неустойчивость схемы аппроксимации на середину квадрата при малых шагах. Лучшим методом для данного примера является аналог схемы Кранка–Никольсон.

П р и м е р 12.

Рассмотрим тестовое уравнение с распределенным запаздыванием по переменной t :

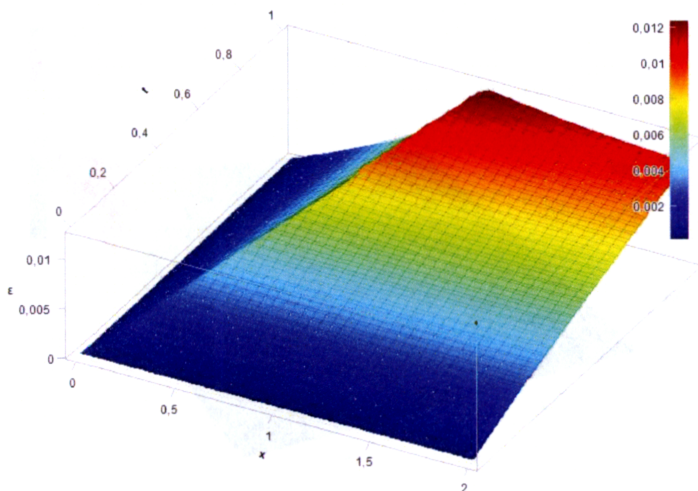


Рис. 19. Абсолютная погрешность решения уравнения (6.50) при помощи схемы аппроксимации на середину квадрата при количестве шагов по x — 80, по t — 20

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \int_{t-\frac{1}{2}}^t u(x, s) ds + e^x \left(\pi + \frac{1}{\pi} \right) \cos \pi t, \quad (6.51)$$

при $x \in [0, 2], t \in [0, 1], a = \frac{1}{\pi}$ с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, t) = e^x, x \in [0, 2], t \in [-\frac{1}{2}, 0], \quad u(0, t) = \sin \pi t, t \in [0, 1].$$

Данное уравнение имеет точное решение: $u(x, t) = e^x \sin \pi t$. На рис. 20 и 21 можно увидеть абсолютную погрешность решения уравнения разных схем при одинаковых шагах по t и по x .

По данному примеру можно сделать те же выводы, что и по предыдущему примеру.

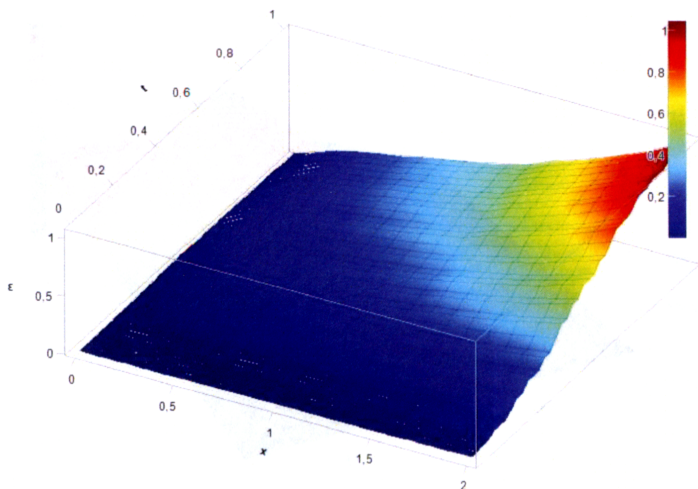


Рис. 20. Абсолютная погрешность решения уравнения (6.51) (количество шагов по $x = 40$, по $t = 10$) при помощи метода бегущего счета

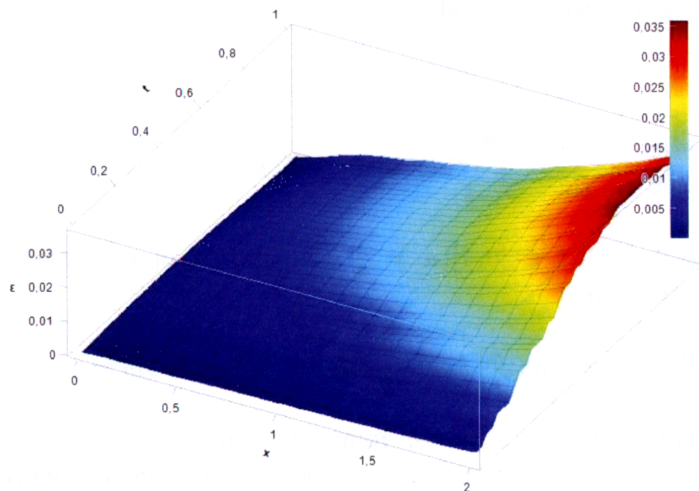


Рис. 21. Абсолютная погрешность решения уравнения (6.51) (количество шагов по $x = 40$, по $t = 10$) при помощи аналога схемы Кранка–Никольсон

Таблица 10. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (6.51) при разных шагах для методов: 1) схема бегущего счета, 2) аналог схемы Кранка–Никольсон, 3) схема аппроксимации на середину квадрата

Шаги	Метод 1	Метод 2	Метод 3
$h = 0.05, \Delta = 0.05$	1.04634	0.03591	1.07102
$h = 0.025, \Delta = 0.05$	1.0883	0.02285	$7.53 \cdot 10^{45}$
$h = 0.05, \Delta = 0.025$	0.50738	0.03375	0.55123
$h = 0.05, \Delta = 0.0125$	0.23664	0.03416	0.32692
$h = 0.025, \Delta = 0.0125$	0.25963	0.01754	0.28426
$h = 0.0125, \Delta = 0.00625$	0.13130	0.00896	0.14434
$h = 0.00313, \Delta = 0.00625$	0.13925	0.00224	∞

7. Численные методы решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений. Результаты получены совместно с М. А. Паначевым

В смешанных функционально-дифференциальных уравнениях одна независимая переменная, играющая роль времени, отвечает за эволюцию, другая трактуется как пространственная. Математическая теория таких уравнений была развита, прежде всего, трудами А. Д. Мышкиса [20]. Аналитическое исследование такого рода объектов весьма затруднено, поэтому интерес представляют численные методы их решения; отсутствие алгоритмов и соответствующих программ препятствует, на наш взгляд, широкому распространению таких объектов в математическом моделировании. Кроме самостоятельного значения, важность смешанных функционально-дифференциальных уравнений обусловлена тем, что если к уравнениям в частных производных первого порядка с наследственностью применить метод характеристик, то они сводятся как раз к смешанным функционально-дифференциальным уравнениям.

7.1. Постановка задачи и предположения

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{du}{dt} = f(x, t, u(x, t), u_{x,t}). \quad (7.1)$$

Здесь $u(x, t)$ — искомая функция, $x \in [a, b]$, $t \in [0, T]$ независимые переменные, $u_{x,t} = \{u(x + \xi, t + s), -\eta \leq \xi \leq \eta, -\tau \leq s \leq 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t , зависящая также от пространственного аргумента из зоны влияния $[x - \eta, x + \eta]$, $\tau > 0$ — величина запаздывания, $\eta > 0$ — величина, характеризующая зону влияния.

Обозначим $\Pi = [a, b] \times [0, T]$, $D = [-\eta, \eta] \times [-\tau, 0]$, $\Omega_0 = [a, b] \times [-\tau, 0]$, $\Omega_1 = [a - \eta, a] \times [-\tau, T]$, $\Omega_2 = [b + \eta, b] \times [-\tau, T]$, $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$. Пусть на множестве Ω определена функция (продолжающая) $\varphi(x, t)$, требуется найти решение уравнения (7.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (7.2)$$

это условие играет роль начальных и граничных условий.

Обозначим через P банахово пространство регулярных, т. е. ограниченных, измеримых по первому аргументу и непрерывных по второму функций $w(\xi, s)$, определенных на D , с нормой $\|w\|_P = \sup_{(\xi, s) \in D} |w(\xi, s)|$. Будем предполагать, что функционал $f(x, t, u, w)$ определен на $\Pi \times R \times P$ и удовлетворяет вместе с функцией $\varphi(x, t)$ условиям, гарантирующим существование и единственность решения задачи (7.1)–(7.2), см. [20, с. 20], в том числе липшицевости $f(x, t, u, w)$ по двум последним аргументам: существуют такие константы L и M , что для любых $(x, t) \in \Pi$, $u^{(1)} \in R$, $u^{(2)} \in R$, $w^{(1)} \in D$, $w^{(2)} \in D$ выполняется

$$\begin{aligned} & |f(x, t, u^{(1)}, w^{(1)}) - f(x, t, u^{(2)}, w^{(2)})| \leq \\ & \leq L|u^{(1)} - u^{(2)}| + M\|w^{(1)} - w^{(2)}\|_P. \end{aligned}$$

7.2. Одношаговые методы типа Рунге–Кутты

Проведем дискретизацию задачи. Пусть пространственный шаг $h > 0$ такой, что $\eta/h = K$ — целое и временной шаг $\Delta > 0$ такой, что $\tau/\Delta = m$ — целое. Обозначим через $x_i = a + ih \in [a - \eta, b + \eta]$, $i = -K, \dots, N + K$, через $t_j = j\Delta \in [-\tau, T]$, $j = -m, \dots, J = T/\Delta$. Сеткой назовем набор таких пар $\{x_i, t_j\}$. Приближения функции $u(x_i, t_j)$ в узлах сетки будем обозначать u_j^i . Дискретным влиянием для узла $\{x_i, t_j\} \in \Pi$ назовем набор значений $\{u_l^n\}_j^i = \{u_l^n, i - K \leq n \leq i + K, j - m \leq l \leq j\}$.

Для построения адекватной исходной задаче численной модели в плане учета предыстории введем интерполяцию дискретной предыстории модели. Оператором интерполяции I назовем отображение $\{u_l^k\}_j^i \rightarrow v_{x_i, t_j} = \{v(x_i + \xi, t_j + s), -\eta \leq \xi \leq \eta, -\tau \leq s \leq 0\} \in P$. Для рассматриваемых ниже методов потребуется также экстраполяция по времени вперед при заданном параметре $\alpha > 0$. Обозначим $D_\alpha = [-\eta, \eta] \times [0, \alpha\Delta]$, через P_α множество ограниченных, измеримых по первому аргументу и непрерывных по второму функций $w(\xi, s)$, определенных на D_α . Оператором экстраполяции E назовем отображение $\{u_l^k\}_j^i \rightarrow v_{x_i, t_j} = \{v(x_i + \xi, t_j + s), -\eta \leq \xi \leq \eta, 0 \leq s \leq \alpha\Delta\} \in P_\alpha$.

Для натурального k назовем одношаговым k -этапным явным методом типа Рунге–Кутты – ЯРК-методом (с заданной интерполяцией I и экстраполяцией E) численную модель вида

$$u_{j+1}^i = u_j^i + \Delta \sum_{l=1}^k \sigma_l h_l(u_j^i, v_{x_i, t_j}),$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, J-1, \quad (7.3)$$

$$h_1(u_j^i, v_{x_i, t_j}) = f(x_i, t_j, u_j^i, v_{x_i, t_j}), \quad (7.4)$$

$$h_l(u_j^i, v_{x_i, t_j}) = f(x_i, t_j + a_l \Delta, u_j^i + \Delta \sum_{n=1}^{l-1} b_{ln} h_n(u_j^i, v_{x_i, t_j}),$$

$$v_{x_i, t_j + a_l \Delta}), \quad (7.5)$$

с начальными условиями $u_j^i = \varphi(x_i, t_j)$ при $\{x_i, t_j\} \in \Omega_0$, и краевыми условиями $u_j^i = \varphi(x_i, t_j)$ при $\{x_i, t_j\} \in \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Здесь предыстория модели определяется соотношениями

$$v_{x_i, t_j}(\xi, s) = \begin{cases} \varphi(x_i + \xi, t_j + s) & \text{при } t_j + s \leq 0 \text{ или } x_i + \xi \leq a \\ & \text{или } x_i + \xi \geq b, \\ I(\{u_l^n\}_j^i) & \text{при } -\tau \leq s < 0, \\ E(\{u_l^n\}_j^i) & \text{при } 0 \leq s \leq \alpha\Delta, \end{cases}$$

$$\alpha = \max\{|a_l|, 1 \leq l \leq k\}.$$

Числа $\alpha_l, \sigma_l, b_{ln}$ называются коэффициентами метода. Будем обозначать $\sigma = \max\{|\sigma_l|\}, b = \max\{|b_{ln}|\}$.

Рассмотрим вопрос о величине погрешности метода $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$.

Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует константа C , что выполняется неравенство: $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 1, \dots, N-1$ и $j = 0, \dots, J$.

Порядок сходимости метода зависит от трех факторов: порядка невязки, порядка интерполяции и порядка экстраполяции.

Невязкой (погрешностью аппроксимации ЯРК-метода) назовем сеточную функцию

$$\psi_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - \sum_{l=1}^k \sigma_l h_l(u(x_i, t_j), u_{x_i, t_j}).$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок Δ^q , если существует константа C , что выполняется неравенство: $|\psi_j^i| \leq C\Delta^q$ для всех $i = 1, \dots, N-1$ и $j = 0, \dots, J-1$. Заметим, что невязка определена на точном решении $u(x, t)$ и не зависит от интерполяции и экстраполяции.

Будем говорить, что оператор интерполяции I имеет порядок $h^p + \Delta^q$ на точном решении, если существуют константы C_1 и C_1 , такие, что для всех $i = 1, \dots, N-1, j = 0, \dots, J, x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ и $t \in [t_j - \tau, t_j]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & |u(x, t) - v(x, t)| \leq \\ & \leq C_1 \max_{i-K \leq l \leq i+K, j-m \leq n \leq j} |u(x_l, t_n) - u_n^l| + C_2(h^p + \Delta^q). \end{aligned}$$

Будем говорить, что оператор экстраполяции E имеет порядок $h^p + \Delta^q$ на точном решении, если существуют константы

C_1 и C_1 , такие, что для всех $i = 1, \dots, N-1$, $j = 0, \dots, J$, $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ и $t \in [t_j, t_j + \alpha\Delta]$ выполняется неравенство

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \\ \leq C_1 \max_{i-K \leq l \leq i+K, j-m \leq n \leq j} |u(x_l, t_n) - u_n^l| + C_2(h^p + \Delta^q).$$

Теорема 24. Если ЯРК-метод (7.3)–(7.5) имеет порядок невязки Δ^{q_1} , интерполяция предыстории модели имеет порядок $h^{p_2} + \Delta^{q_2}$, экстраполяция имеет порядок $h^{p_3} + \Delta^{q_3}$ ($p_n > 0, q_n > 0, n = 1, 2, 3$), то метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, где $p = \min\{p_2, p_3\}$, $q = \min\{q_1, q_2, q_3\}$.

Для доказательства теоремы рассмотрим два вспомогательных утверждения. В этих утверждениях и их доказательствах, а также в доказательстве самой теоремы индекс i меняется от 1 до $N-1$.

Лемма 1. Функционалы h_l , определяемые в (7.4)–(7.5), липшицевы в следующем смысле: найдутся такие константы L_l и M_l , что

$$|h_l(u_j^i, v_{x_i, t_j}) - h_l(u(x_i, t_j), u_{x_i, t_j})| \leq \\ \leq L_l |u_j^i - u(x_i, t_j)| + M_l \sup_{x_i - \eta \leq x \leq x_i + \eta, t_j - \tau \leq t \leq t_j + \alpha\Delta} |v(x, t) - u(x, t)|.$$

Доказательство проведем индукцией по l .

При $l = 1$ функционал $h_1(u_j^i, v_{x_i, t_j}) = f(x_i, t_j, u_j^i, v_{x_i, t_j})$ и, следовательно, по предположению раздела 7.1, липшицев, причем $L_1 = L, M_1 = M$.

Предположим, что для индексов $n \leq l-1$ функционалы h_n липшицевы с константами L_n, M_n . Докажем липшицевость функционала h_l :

$$|h_l(u_j^i, v_{x_i, t_j}) - h_l(u(x_i, t_j), u_{x_i, t_j})| = \\ = |f(x_i, t_j + a_l \Delta, u_j^i + \Delta \sum_{n=1}^{l-1} b_{ln} h_n(u_j^i, v_{x_i, t_j}), v_{x_i, t_j + a_l \Delta}) -$$

$$\begin{aligned}
& -f(x_i, t_j + a_l \Delta, u(x_i, t_j) + \Delta \sum_{n=1}^{l-1} b_{ln} h_n(u(x_i, t_j), u_{x_i, t_j + a_l \Delta})) \leq \\
& \leq L|u_j^i - u(x_i, t_j)| + L\Delta b \sum_{n=1}^{l-1} |h_n(u_j^i, v_{x_i, t_j}) - h_n(u(x_i, t_j), u_{x_i, t_j})| + \\
& + M \sup_{x_i - \eta \leq x \leq x_i + \eta, t_j - \tau \leq t \leq t_j + \alpha \Delta} |v(x, t) - u(x, t)| \leq \\
& \leq L|u_j^i - u(x_i, t_j)| + L\Delta b \sum_{n=1}^{l-1} (L_n |u_j^i - u(x_i, t_j)| + \\
& + M_n \sup_{x_i - \eta \leq x \leq x_i + \eta, t_l - \tau \leq t \leq t_l + \alpha \Delta} |v(x, t) - u(x, t)|) + \\
& + M \sup_{x_i - \eta \leq x \leq x_i + \eta, t_l - \tau \leq t \leq t_l + \alpha \Delta} |v(x, t) - u(x, t)|.
\end{aligned}$$

Таким образом, функционал h_l липшицев с константами

$$L_l = L + L\Delta b \sum_{n=1}^{l-1} L_n, \quad M_l = M + L\Delta b \sum_{n=1}^{l-1} M_n.$$

Лемма 2. Если оператор интерполяции имеет порядок $h^{p_2} + \Delta^{q_2}$, оператор экстраполяции имеет порядок $h^{p_3} + \Delta^{q_3}$, то найдутся такие константы \hat{C}_1 и \hat{C}_2 , что выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
& |h_l(u_j^i, v_{x_i, t_j}) - h_l(u(x_i, t_j), u_{x_i, t_j})| \leq \\
& \leq \hat{C}_1 \max_{i-K \leq l \leq i+K, j-m \leq n \leq j} |u(x_l, t_n) - u_n^l| + \hat{C}_2 (h^{\min\{p_2, p_3\}} + \Delta^{\min\{q_2, q_3\}}).
\end{aligned}$$

В самом деле, объединяя определения порядков операторов интерполяции и экстраполяции, получаем, что найдутся константы C_1 и C_1 , такие, что для всех $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, J$, $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ и $t \in [t_j, t_j - \tau + \alpha \Delta]$ выполняется неравенство

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq C_1 \max_{i-K \leq l \leq i+K, j-m \leq n \leq j} |u(x_l, t_n) - u_n^l| +$$

$$+C_2(h^{\min\{p_2,p_3\}} + \Delta^{\min\{q_2,q_3\}}).$$

Отсюда, и из предыдущей леммы вытекает

$$\begin{aligned} & |h_l(u_j^i, v_{x_i, t_j}) - h_l(u(x_i, t_j), u_{x_i, t_j})| \leq \\ & \leq L_l \|u_j^i - u(x_i, t_j)\| + M_l \sup_{x_i - \eta \leq x \leq x_i + \eta, t_l - \tau \leq t \leq t_l + \alpha \Delta} |v(x, t) - u(x, t)| \leq \\ & \leq L_l \|u_j^i - u(x_i, t_j)\| + M_l (C_1 \max_{i-K \leq l \leq i+K, j-m \leq n \leq j} |u(x_l, t_n) - u_n^l| + \\ & + C_2(h^{\min\{p_2,p_3\}} + \Delta^{\min\{q_2,q_3\}})). \end{aligned}$$

Взяв

$$\hat{C}_1 = \max_{1 \leq l \leq k} M_l C_1 + \max_{1 \leq l \leq k} L_l, \quad \hat{C}_2 = \max_{1 \leq l \leq k} M_l C_2,$$

получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы.

Выразим величину модуля погрешности $|\varepsilon_{j+1}^i|$ через $|\varepsilon_j^i|$, при этом точное решение $u(x_i, t_{j+1})$ подставим из определения невязки, а приближенное u_{j+1}^i – из определения метода (7.3)–(7.5). С использованием леммы 2 получаем

$$\begin{aligned} & |\varepsilon_{j+1}^i| = |u(x_i, t_{j+1}) - u_{j+1}^i| = \\ & = |u(x_i, t_j) + \Delta \psi_j^i - u_j^i + \Delta \sum_{l=1}^k \sigma_l (h_l(u(x_i, t_j), u_{x_i, t_j}) - h_l(u_j^i, v_{x_i, t_j}))| \leq \\ & \leq |\varepsilon_j^i| + \Delta |\psi_j^i| + \Delta \sum_{l=1}^k |\sigma_l| (\hat{C}_1 \max_{i-K \leq l \leq i+K, j-m \leq n \leq j} |\varepsilon_n^i| + \hat{C}_2 (h^{\min\{p_2,p_3\}} + \\ & + \Delta^{\min\{q_2,q_3\}})) \leq |\varepsilon_j^i| + \Delta k \sigma \hat{C}_1 \max_{i-K \leq l \leq i+K, j-m \leq n \leq j} |\varepsilon_n^i| + \\ & + \Delta k \sigma \hat{C}_2 (h^{\min\{p_2,p_3\}} + \Delta^{\min\{q_2,q_3\}}) + C \Delta^{q_1+1}. \end{aligned}$$

Введем послонную норму погрешности

$$\epsilon_j = \|\varepsilon_j^i\|_j = \max_{0 \leq i \leq N} |\varepsilon_j^i|,$$

тогда выведенную оценку можно переписать как

$$\epsilon_{j+1} \leq \epsilon_j + \Delta C_3 \max_{j-m \leq n \leq j} \epsilon_n + C_4 \Delta (h^p + \Delta^q), \quad (7.6)$$

где $C_3 = k\sigma\hat{C}_1$, $C_4 = k\sigma\hat{C}_2 + C$, $p = \min\{p_2, p_3\}$, $q = \min\{q_1, q_2, q_3\}$.

Индукцией по j докажем оценку

$$\epsilon_j \leq (1 + \Delta(C_3 + 1))^j C_4 (h^p + \Delta^q). \quad (7.7)$$

База индукции выполняется, так как $\epsilon_0 = 0$.

Шаг индукции. Пусть оценка (7.7) выполняется для индексов $\leq j$, покажем ее справедливость для $j + 1$.

Пусть \max в правой части оценки (7.6) достигается на индексе $n_0 \leq j$, тогда, применяя индуктивное предположение к ϵ_j и ϵ_{n_0} , получаем

$$\begin{aligned} \epsilon_{j+1} &\leq \epsilon_j + \Delta C_3 \epsilon_{n_0} + C_4 \Delta (h^p + \Delta^q) \leq \\ &\leq (1 + \Delta(C_3 + 1))^j C_4 (h^p + \Delta^q) + \\ &+ \Delta C_3 (1 + \Delta(C_3 + 1))^{n_0} C_4 (h^p + \Delta^q) + C_4 (h^p + \Delta^q) \leq \\ &\leq (1 + \Delta(C_3 + 1))^j C_4 (h^p + \Delta^q) (1 + C_3 \Delta + \Delta). \end{aligned}$$

Оценка (7.7) доказана.

Так как $j \leq J = T/\Delta$, то из (7.7) вытекает оценка

$$\epsilon_j \leq (1 + \Delta(C_3 + 1))^{T/\Delta} C_4 (h^p + \Delta^q) \leq e^{(C_3+1)T} C_4 (h^p + \Delta^q),$$

которая содержит утверждение теоремы.

7.3. Многошаговые методы

Наряду с методами типа Рунге–Кутты при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений [15] самыми распространенными являются многошаговые линейные методы, построим их многомерный аналог для смешанных функционально-дифференциальных уравнений.

Пусть, так же как в предыдущем разделе, заданы сетка, операторы интерполяции и экстраполяции дискретной предыстории модели.

Явным k -шаговым методом назовем дискретную модель вида

$$u_j^i = \sum_{l=1}^k \alpha_l u_{j-l}^i + \Delta \sum_{l=1}^k \beta_l f_{j-l}^i, \quad j = k, \dots, J, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (7.8)$$

где α_l и β_l ($l = 1, \dots, k$) – параметры метода, $f_{j-l}^i = f(x_i, t_{j-l}, u_{j-l}^i, v_{x_i, t_{j-l}})$.

Неявным k -шаговым методом назовем модель

$$u_j^i = \sum_{l=1}^k \alpha_l u_{j-l} + \Delta \sum_{l=0}^k \beta_l f_{j-l}^i, \quad j = k, \dots, J, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (7.9)$$

Отметим, что для применения моделей (7.8) или (7.9) при $j = k$ необходимо знание стартовых значений u_j^i , $j = 0, \dots, k-1$, $i = 1, \dots, N-1$, которые также определяют f_j^i (сделать разгон).

Будем говорить, что задан разгон порядка p , если найдется $C > 0$ такое, что $\|u(x_i, t_j) - u_j^i\| \leq C \Delta^p$ для $j = 0, \dots, k-1$ и $i = 1, \dots, N-1$.

Можно также отметить, что, в отличие от методов типа Рунге–Кутты, в многошаговых методах экстраполяция нужна лишь для неявных методов.

В дальнейшем для простоты будем рассматривать только явные методы (7.8). Невязкой явных многошаговых методов (7.8) назовем сеточную функцию

$$\psi_j^i = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{l=1}^k \alpha_l u(x_i, t_{j-l}) - u(x_i, t_j) \right) + \sum_{l=1}^k \beta_l \hat{f}_{j-l}^i, \quad (7.10)$$

$$\hat{f}_{j-l}^i = f(x_i, t_{j-l}, u(x_i, t_{j-l}), u_{x_i, t_{j-l}}).$$

Будем говорить, что метод (7.8) (или (7.9)) 0-устойчив, если выполняется условие корней, т. е. все корни λ производящего многочлена

$$\lambda^k - \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda^{k-i}$$

удовлетворяют условию $|\lambda| \leq 1$, причем если $|\lambda| = 1$, то корень простой. Уравнение

$$\lambda^k - \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda^{k-i} = 0$$

называется характеристическим. Учитывая определения порядка сходимости, порядка невязки и порядка интерполяции, данные в предыдущем разделе, сформулируем теорему.

Теорема 25. Пусть многошаговый метод (7.8) 0-устойчив и имеет порядок невязки Δ^{q_1} , разгон порядка Δ^{q_2} , порядок интерполяции предыстории модели $h^p + \Delta^{q_3}$. Тогда он сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, где $q = \min\{q_1, q_2, q_3\}$.

Для доказательства сведем метод (7.8) к общей схеме главы 2.

Определим параметр t_0 в общей схеме соотношением $\hat{t}_0 = (k-1)\Delta$. Определим для каждого $i = 1, \dots, N-1$ в моменты $t_j = j\Delta = \hat{t}_0 + (j-k+1)\Delta$ вектора

$$y_j^i = (y_{1,j}^i, y_{2,j}^i, \dots, y_{k,j}^i) = (u_j^i, u_{j-1}^i, \dots, u_{j-k+1}^i) \in R^k.$$

Согласно определениям, координаты этих векторов связаны соотношениями

$$y_{i,j}^i = \sum_{l=1}^k \alpha_l y_{i,j-1}^i + \Delta \sum_{l=1}^k \beta_l f_{j-l}^i, \quad j = k, \dots, J, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$y_{l,j}^i = y_{l-1,j-1}^i, \quad l = 2, \dots, k, \quad j = k, \dots, J, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

или в матричном виде

$$y_{j+1}^i = S^* y_j^i + \Delta \Phi_j^i, \quad (7.11)$$

где

$$S^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_j^i = \begin{pmatrix} \Phi_{1,j}^i \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{1,j}^i = \sum_{j=1}^k b_j f_{j+1-l}^i.$$

Определим расширенный вектор

$$y_j = (y_j^1, y_j^2, \dots, y_j^{N-1}) \in R^{k \times (N-1)},$$

тогда формулу (7.11) можно переписать в виде

$$y_{j+1} = S y_j + \Delta \Phi_j, \quad (7.12)$$

где

$$S = \begin{pmatrix} S^* & O & O \\ O & S^* & O \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & \dots & S^* \end{pmatrix}, \quad \Phi_j = \begin{pmatrix} \Phi_j^1 \\ \Phi_j^2 \\ \cdot \\ \Phi_j^{N-1} \end{pmatrix},$$

O - нулевая матрица.

Формула (7.12) является аналогом пошаговой формулы (2.3) в общей схеме. Отметим, что в каждый момент t_j функция Φ_j зависит от результата интерполяции предыстории вектора y_j .

Собственные числа матрицы S , так же как и собственные числа матрицы S^* , являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0,$$

поэтому метод устойчив тогда и только тогда, когда все корни этого уравнения по модулю не больше 1, а среди корней, равных по модулю 1, нет кратных.

Порядок невязки с интерполяцией метода (7.12) определяется как $h^p + \Delta^{\min q_1, q_2}$. Этот факт проверяется подобно аналогичным утверждениям, приведенным выше (теоремы 3, 6, 9, 12). Вложение в общую разностную схему с последствием проведено, откуда, используя теорему 1, получаем утверждение теоремы.

7.4. Многошаговые методы, не требующие разгона

Среди разнообразия многошаговых методов отметим класс методов, которые выделяются простотой в реализации благодаря тому обстоятельству, что они не требуют разгона по какому-то другому методу. Дело в том, что специфика функционально-дифференциальных уравнений, в том числе и смешанных ФДУ, состоит в том, что изначально известны из начальных условий (7.2) значения модели u_j^i при $-m \leq j \leq 0$. Однако применять формулы (7.8) или (7.9) без разгона, т. е. при $j = 1, 2, \dots, k-1$, вообще говоря, нельзя, так как не определены значения f_j^i при $j < 0$.

Если $m \geq k$, то явным k -шаговым методом, не требующим разгона, назовем модель

$$u_j^i = \sum_{l=1}^k \alpha_l u_{j-l} + \Delta \beta_1 f_{j-1}^i, \quad j = 1, \dots, J, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (7.13)$$

где

$$u_j^i = \varphi(x_i, t_j), \quad \text{при } i = 1, \dots, N-1, \quad -k \leq j \leq 0.$$

Согласно требованиям барьера Далквиста [15, 41], порядок невязки p явных 0-устойчивых методов удовлетворяет условию $p \leq k$.

0-устойчивыми методами (7.13), для которых $p = k$, являются:

явный метод Эйлера

$$u_j^i = u_{j-1}^i + \Delta f_{j-1}^i, \quad p = k = 1,$$

который нужно применять с интерполяцией первого порядка по Δ (например, кусочно-постоянной по t), и правило средней точки

$$u_j^i = u_{j-2}^i + 2\Delta f_{j-1}^i, \quad p = k = 2,$$

этот метод нужно применять с интерполяцией второго порядка по Δ (например, кусочно-линейной по t).

При $k \geq 3$ среди методов вида (7.13), для которых $p = k$, нет 0-устойчивых; чтобы построить 0-устойчивый метод 3-го порядка невязки, нужно взять семейство четырехшаговых методов. Эти методы образуют однопараметрическое семейство

$$u_j^i = \alpha u_{j-1}^i + \frac{6-18\alpha}{11} u_{j-2}^i + \frac{8+9\alpha}{11} u_{j-3}^i - \frac{3+2\alpha}{11} u_{j-4}^i + \\ + \frac{24-6\alpha}{11} \Delta f_{j-1}^i, \quad -\frac{2}{5} \leq \alpha < \frac{1}{3}, \quad (7.14)$$

и эти методы нужно применять с интерполяцией третьего порядка по Δ (например, кусочно-параболической по t).

Один из методов этого семейства

$$u_j^i = -\frac{2}{5} u_{j-1}^i + \frac{6}{5} u_{j-2}^i + \frac{2}{5} u_{j-3}^i - \frac{1}{5} u_{j-4}^i + \frac{12}{5} \Delta f_{j-1}^i, \quad (7.15)$$

получаемый при $\alpha = -\frac{2}{5}$ из (7.14), был приведен в [15] для случая ФДУ. Однако, численные эксперименты с этим методом дали не очень хорошие результаты, по-видимому, это объясняется наличием корня $\lambda = -1$ среди корней характеристического уравнения.

Более перспективные результаты дали численные эксперименты с другим методом

$$u_j^i = \frac{6}{11} u_{j-2}^i + \frac{8}{11} u_{j-3}^i - \frac{3}{11} u_{j-4}^i + \frac{24}{11} \Delta f_{j-1}^i, \quad (7.16)$$

который получается при $\alpha = 0$ из (7.14).

7.5. Сведение решения уравнения переноса с наследственностью к решению смешанных функционально-дифференциальных уравнений и численные эксперименты

Уравнения в частных производных первого порядка без запаздывания методом характеристик сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Уравнения в частных производных первого порядка с наследственностью, в частности, с запаздыванием, аналогом метода характеристик сводятся к специальному виду смешанных функционально-дифференциальных уравнений. Продемонстрируем это на уравнении переноса с наследственностью вида

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z, y) + a \frac{\partial u}{\partial z}(z, y) = f(z, y, u(z, y), u_y(z, \cdot)). \quad (7.17)$$

Здесь $u(z, y)$ — искомая функция, $z \geq 0$, $y \geq 0$ — независимые переменные, $u_y(z, \cdot) = \{u(z, y + s), -\tau \leq s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту y , τ — величина запаздывания.

Заданы начальные условия: $u(z, y) = \varphi(z, y)$, $z \geq 0$, $y \in [-\tau, 0]$ и граничные условия: $u(0, y) = \psi(y)$, $y \geq 0$.

Сделаем замену независимых переменных

$$t = z + ay, \quad x = z - ay,$$

тогда уравнение (7.17) сводится к смешанному функционально-дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dt}(x, t) = F(x, t, u(x, t), u_{x,t}(\cdot)), \quad t \geq 0, \quad -t \leq x \leq t, \quad (7.18)$$

где $u_{x,t}(\cdot) = \{u(x - as, t + as), -\tau \leq s < 0\}$ — функция влияния в точке с координатами (x, t) .

Это уравнение является частным случаем уравнения (7.1) с одномерной зоной влияния, представляющей собой отрезок прямой. Можно применять численные методы решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений, изложенные в предыдущих разделах, одношаговые методы типа Рунге–Кутты или многошаговые, в том числе и бесстартовые процедуры, с тем упрощением, что интерполяция дискретной предыстории рассматривается одномерная вдоль зоны влияния.

Пример 13. Тестовый пример.

Рассмотрим следующее уравнение переноса с постоянным запаздыванием:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) \cos y + u(z, y) - u\left(z, y - \frac{\pi}{2}\right), \quad (7.19)$$

при $(z, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] = \Pi$,

с начальными и граничными условиями вида

$$u(z, y) = \sin z \cos y, \quad (z, y) \in [0, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] = \Omega_0,$$

$$u(0, y) = 0, \quad (0, y) \in \{0\} \times [0, \pi] = \Omega_1.$$

Уравнение имеет точное решение $u = \sin z \cos y$.

Сделаем замену независимых переменных

$$t = z + y, \quad x = z - y,$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial t},$$

и уравнение (7.19) сводится к смешанному функционально-дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) \cos \frac{t-x}{2} + \frac{1}{2}u(x, t) - \frac{1}{2}u\left(x + \frac{\pi}{2}, t - \frac{\pi}{2}\right),$$

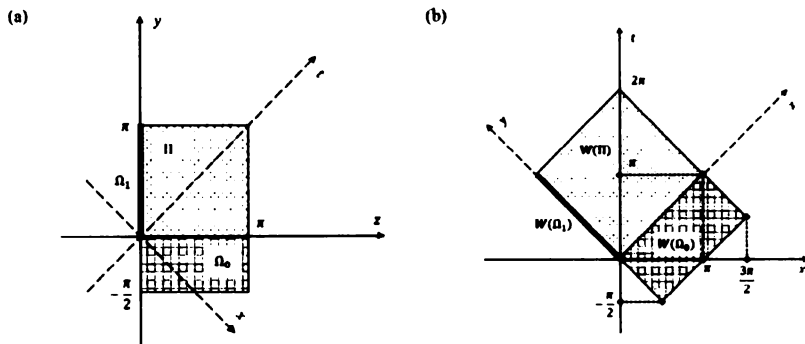


Рис. 22. Преобразование области определения уравнения переноса с запаздыванием методом характеристик

$$(x, t) \in W(\Pi) \quad (7.20)$$

с начальными условиями

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin t, \quad (x, t) \in W(\Omega_0),$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in W(\Omega_1),$$

где $W(\Pi)$, $W(\Omega_0)$, $W(\Omega_1)$ — образы соответствующих областей при линейном преобразовании координат (см. рис. 22).

В табл. 11 приведены результаты численного эксперимента, при этом выдается максимальная величина погрешности по всей рассматриваемой области. Первая колонка — количество шагов по времени в величине запаздывания $\tau/\Delta = m$. Вторая — результаты расчета по явному методу Эйлера, третья — по правилу средней точки, четвертая — по методу (7.16).

Таблица 11. Максимальные нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (7.19) при разных шагах дискретизации для бесстартовых методов

	$m = 10$	$m = 10^2$	$m = 10^3$
Явный метод Эйлера	$6.8 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$
Правило средней точки	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$
Метод (7.16)	$7 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-9}$

Список литературы

- [1] *Бабский В.Г., Мышкис А.Д.* Математические модели в биологии, связанные с учетом последействия // Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М. : Мир, 1983. С. 383–394.
- [2] *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М. : Мир, 1967. 254 с.
- [3] *Брацун Д.А., Захаров А.П.* Моделирование пространственно-временной динамики циркадианских ритмов *Neurospora crassa* // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3, N. 2. С. 191–213.
- [4] *Вабищевич П.Н.* Вычислительные методы математической физики. Нестационарные задачи. М. : Вузовская книга, 2008. 228 с.
- [5] *Волканин Л.С.* Численное решение уравнения переноса с эффектом паследствености // Теория управления и математическое моделирование. Ижевск : Изд. ИжГТУ, 2012. С. 12–13.
- [6] *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М. : Машиностроение, 1974. 328 с.
- [7] *Гурли С.А., Соу Д.В., Ву Д.Х.* Нелокальные уравнения реакции-диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 1. С. 84–120.
- [8] *Денисов А.М.* Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, N. 1. С. 139–146.

- [9] *Захаров А.П., Брацун Д.А.* Адаптивный алгоритм хранения при расчете динамики сплошной среды с наследственной или запаздывающей обратной связью // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6, N. 2. С. 198–206.
- [10] *Захаров А.П., Брацун Д.А.* Синхронизация циркадианных ритмов в масштабах гена, клетки и всего организма // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5, N. 2. С. 255–270.
- [11] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. 2-е изд. СПб. : БХВ-Петербург, 2011. 586 с.
- [12] *Камонт З., Кропельница К.* Неявные разностные методы для эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычис. математики. 2011. Т. 14, N. 4. С. 361–379.
- [13] *Камонт З., Черноус В.* Неявные разностные методы для функциональных дифференциальных уравнений Гамильтона-Якоби // Сиб. журн. вычисл. математики. 2009. Т. 12, N. 1. С. 57–70.
- [14] *Ким А.В., Пименов В.Г.* О применении i -гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1998. N. 5. С. 104–126.
- [15] *Ким А.В., Пименов В.Г.* i -Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М. ; Ижевск : РХД, 2004. 256 с.
- [16] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Гостехиздат, 1959. 211 с.

- [17] *Лекомцев А.В.* Схема с весами для численного решения одномерного уравнения теплопроводности с запаздыванием для случая переменного коэффициента теплопроводности // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5–2. С. 2574–2575.
- [18] *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М. : Наука, 1977. 456 с.
- [19] *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М. : Наука, 1972. 352 с.
- [20] Мышкис А.Д. Смешанные функционально-дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5–120.
- [21] *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике. М. : Бином, 2006. 524 с.
- [22] *Пименов В. Г.* Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, N. 1. С. 105–114.
- [23] *Пименов В.Г.* Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 111–116.
- [24] *Пименов В.Г.* Разностные схемы в моделировании эволюционных управляемых систем с последствием // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, N. 5. С. 151–158.
- [25] *Пименов В.Г., Лекомцев А.В.* Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, N. 1. С. 102–118.

Перевод: *Lekomtsev A.V. and Pimenov V.G.* Convergence of the Alternating Direction Methods for the Numerical solution of a Heat Conduction Equation with Delay // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2011. Vol. 272, N. 1. P. 101–118.

- [26] *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Алгоритмы численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Сб. научных трудов «Проблемы динамического управления». Вып. 3. М. : ВМК МГУ, 2008. С. 161–169.

- [27] *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, N. 1. С. 178–189.

Перевод: *Pimenov V.G. and Lozhnikov A.B.* Difference schemes for the numerical solution of the heat conduction equation with aftereffect // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2011. Vol. 275. S. 1. P. 137–148.

- [28] *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Численный метод моделирования управляемого уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5–2. С. 2635–2636.

- [29] *Пименов В.Г., Паначев М.А.* Решение уравнения переноса с запаздыванием путем использования численных методов для смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5–2. С. 2637–2638.

- [30] *Пименов В.Г., Таширова Е.Е.* Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, N. 2. С. 222–231.

Перевод: *Pimenov V.G., Tashirova E.E.* Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. Vol. 281. S. 1. P. 126–136.

- [31] *Полянин А.Д., Журов А.И.* Метод функциональных связей: точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Вестник национально-исследовательского университета «МИФИ». 2013. Т. 2, N. 4. С. 425–431.
- [32] *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием // Вестник национально-исследовательского университета «МИФИ». 2014. Т. 3, N. 2. С. 1–20.
- [33] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. 3-е изд. М. : Наука, 1989. 656 с.
- [34] *Самарский А.А., Гулин А. В.* Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.
- [35] *Солодушкин С.И.* Разностная схема для численного решения уравнения переноса с последствием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. N. 10. С. 77–82.
- Перевод: *Solodushkin S.I.* A difference scheme for the numerical solution of an advection equation with aftereffect // Russian Mathematics, Allerton Press Inc. 2013. Vol. 57, N. 10. P. 65–70.
- [36] *Солодушкин С.И.* Численное решение функционально-дифференциальных уравнений в частных производных на примере модели ВИЧ // Российский иммунологический журнал. 2013. Т. 7 (16), N. 2–3. С. 78–79.

- [37] *Солодушкин С.И.* Численный метод решения уравнения переноса с запаздыванием по времени и сдвигом по координатам // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5–2. С. 2681–2682.
- [38] *Солодушкин С.И., Юманова И.Ф.* Анализ модели ВИЧ: идентификация параметров и численные эксперименты // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5–2. С. 2683–2684.
- [39] *Таширова Е.Е.* Численные методы решения двумерного волнового уравнения с последствием // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5–2. С. 2704–2706.
- [40] *Хаделер К.П.* Перенос, реакция и запаздывание в математической биологии и обратная задача для бегущих фронтов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2006. Т. 17. С. 57–77.
- [41] *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М. : Мир, 1990. 512 с.
- [42] *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М. : Мир, 1999. 685 с.
- [43] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984. 420 с.
- [44] *Холл Д., Уатт Д.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1979. 312 с.
- [45] *Adimy M. and Grauste F.* Global Stability of a Partial Differential Equation with Distributed Delay due to Cellular

Replication // Nonlinear Analysis. 2003. Vol. 54, 8. P. 1469–1469.

- [46] *Ansari A.R., Bakr S.A., Shishkin G.I.* A parameter-robust finite difference method for singularly perturbed delay parabolic partial differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. 2007. Vol. 205. P. 552–556.
- [47] *Arino O., Hbid L.M., Dads E.A. (ed.)* Delay Differential Equations and Applications. Springer. 2006.
- [48] *Agirseven D.* Approximate solutions of delay parabolic equations with Dirichlet condition // Abstr. Appl. Anal. 2012. Vol. 2012. Art. ID 682752. 31 p.
- [49] *Atey F.M. (ed.)* Complex Time-Delay Systems: Theory and Applications. Springer. 2010.
- [50] *Bainov D.D., Mishev D.P.* Oscillations Theory for Neutral Differential Equations with Delay. Adam Hilger. 1991.
- [51] *Balachandran B., Kalmar-Nagy T., Gilsinn D.E.* Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions. Springer. 2009.
- [52] *Banks H.T., Sutton K.L., Thompson W.C., Bocharov G., Roose D., Schenkel T. Meyerhans A.* Estimation of Cell Proliferation Dynamics Using CFSE Data // Bull. Math. Biol. 2011. Vol. 73. P. 116–150.
- [53] *Baranowska A.* Numerical methods for nonlinear first-order partial differential equations with deviated variables // Numer. Methods Partial Diff. Equat. 2006. N. 22. P. 708–729.
- [54] *Bellen A. and Zennaro M.* Numerical Methods for Delay Differential Equations. Oxford Science Publications. Oxford, 2003.

- [55] *Czernous W.* Generalized Euler method for first order partial differential functional equations // *Memoirs of Diff. Equat. and Math. Phys.* 2006. N. 39. P. 49–68.
- [56] *Garcia P., Castro M.A., Martin J.A., Sirvent A.* Numerical solutions of diffusion mathematical models with delay // *Mathematical and Computer Modelling.* Amsterdam, 2009. Vol. 50. P. 860–868.
- [57] *Garcia P., Castro M.A., Martin J.A., Sirvent A.* Convergence of two implicit numerical schemes for diffusion mathematical models with delay // *Mathematical and Computer Modelling.* 2010. Vol. 52. P. 1279–1287.
- [58] *Gyllenberg M. and Heijmans J.A.M.* An abstract delay-differential equation modelling size dependent cell growth and division // *SIAM J. Math. Anal.* 1987. Vol. 18. P. 74–88.
- [59] *Higham D.J., Sardar T.* Existence and stability of fixed points for a discretised nonlinear reaction-diffusion equation with delay // *Appl. Numer. Math.* 1995. Vol. 18. P. 155–173.
- [60] *Huang C. and Vandewalle S.* An Analysis of Delay-Dependent Stability for Ordinary and Partial Differential Equations with Fixed and Distributed Delays // *SIAM J. Sci. Comput.* 2004. Vol. 25, N. 5. P. 1608–1632.
- [61] *Jackiewicz Z., Zubik-Kowal B.* Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations // *Appl. Numer. Math.* 2006. Vol. 56. P. 433–443.
- [62] *Kamont Z.* Hyperbolic Functional Differential Inequalities and Applications. Dordrecht. Kluwer Acad. Publ. 1999.
- [63] *Kamont Z., Czernous W.* Implicit difference methods for Hamilton-Jacobi functional differential equations //

Numerical Analysis and Applications. 2009. Vol. 2, N. 1. P. 57–70.

Русский вариант: *Камонт З., Черноус В.* Неявные разностные методы для функциональных дифференциальных уравнений Гамильтона–Якоби // Сиб. журн. вычисл. математики. 2009. Т. 12, N. 1. С. 57–70.

- [64] *Kamont Z., Leszczynski H.* Stability of difference equations generated by parabolic differential-functional problems // *Rend. Mat. Appl* (7). 1996. Vol. 16, N. 2. P. 265–287.
- [65] *Kepczynska A.* Implicit difference methods for first order partial differential functional equations // *Func. Diff. Eq.* 2007. Vol. 14, N. 2–4. P. 279–298.
- [66] *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. 1992. 236 p.
- [67] *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. 1999.
- [68] *Kropielnicka K.* Convergence of Implicit Difference Methods for Parabolic Functional Differential Equations // *Int. Journal of Mat. Analysis*. 2007. Vol. 1, N. 6. P. 257–277.
- [69] *Li J., Zou X.* Modeling spatial spread of infectious diseases with a fixed latent period in a spatially continuous domain // *Bull. Math. Biol.* 2009. Vol. 71. P. 2048–2079.
- [70] *Liu X., Sivaloganathan S. and Zhang S.* Analysis of cell porulation PDE model with general maturation rates // *Anziam J.* 2002. Vol. 43. P. 359–374.
- [71] *Luzyanina T., Roose D., Bocharov G.* Distributed parameter identification for a label-structured cell population dynamics

model CFSE histogram time-series data // J. Math. Biol. 2009. Vol. 59. P. 581–603.

- [72] *Ma S., Zou X.* Existence, uniqueness and stability of travelling waves in a discrete reaction–diffusion monostable equation with delay // J. Differential Equations. 2005. Vol. 217. P. 54–87.
- [73] *Mackey M.C. and Rudnicki R.* Global stability in a delay partial differential equation describing cellular replication // J. Mathematical Biology. 1994. Vol. 33. P. 89–109.
- [74] *Mackey M.C. and Rudnicki R.* A new criterion for the stability of simultaneous cell replication and maturation processes // J. Math. Biol. 1999. Vol. 38. P. 195–219.
- [75] *Meleshko S.V. and Moyo S.* On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with delay // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 338. P. 448–466.
- [76] *Pao C.V.* Numerical methods for systems of nonlinear parabolic equations with time delay // J. Math. Anal. Appl. 1999. N. 240. P. 249–279.
- [77] *Pao C.V.* Finite difference reaction diffusion systems with coupled boundary conditions and time delay // J. Math. Anal. Appl. 2002. N. 272. P. 407–434.
- [78] *Vladimir Pimenov and Andrey Lozhnikov.* Numerical methods for evolutionary equations with delay and software package PDDE // Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8236. P. 437–444.
- [79] *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of lineans and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mechanics Science and Numerical Simulation. 2013. Vol. 54. P. 115–126.

- [80] *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. Vol. 19. P. 409–416.
- [81] *Pulo-Menjouet L. and Rudnicki R.* Global stability of cellular populations with unequal division // Canadian Appl. Mat. Quar. 2000. Vol. 8, N. 2. P. 185–202.
- [82] *Rey A.O., Mackey M.C.* Multistability and boundary layer development in a transport equation with delayed arguments // The Canadian Applied Mathematics Quarterly. 1993. Vol. 1. P. 61–81.
- [83] *Reyes E., Rodriguez F., Martin J.A.* Analytic-numerical solutions of diffusion mathematical models with delays // Comput. Math. Appl. 2008. Vol. 56. P. 743–753.
- [84] *Rezounenko A, Wu J.* A non-local PDE model for population dynamics with stateselective delay: Local theory and global attractors // J. of Comput. and Appl. Math. 2006. Vol. 190. P. 99–113.
- [85] *Ruan S.* Delay Differential Equations in Single Species Dynamics // Delay Differential Equations with Applications / ed. by O. Arino, M. Hbid and E. Ait Dads, NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. 2006. Vol. 205. Springer, Berlin. P. 477–517.
- [86] *Sapa L.* A finite difference method for quasi-linear and nonlinear differential functional parabolic equations with Dirichlets conditions // Ann. Polon. Math. 2008. Vol. 93, N. 2. P. 113–133.
- [87] *Skeel R.D.* Analysis of fixed-stepsize methods // SIAM J. Numer. Anal. 1976. Vol. 13. P. 664–685.

- [88] *Slodicka M.* Parabolic partial didderential equations with memory // Math. Slovaca. 1984. Vol. 34, N. 1. P. 3–34.
- [89] *Solodushkin S.I.* Numerical Modeling of Evolutionary Systems in Partial Derivatives with Time Delay on a Remote Server // Mathematical Models and Methods in Modern Science. 2012. Vol. 14. P. 142–145.
- [90] *Solodushkin S.I.* Numerical Solving of Functional Differential Equations in Partial Derivatives on a Remote Server through a Web Interface // Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8236. P. 502–508.
- [91] *Su Y., Wey J., Shi J.* Hopf Bifurcation in a Diffusive Logistic Equation with Mixed Delay and Ininstantaneaus Density Dependence // J. Dyn. Differ. Equat. 2012. Vol. 24. P. 897–925.
- [92] *Tavernini L.* Finite Difference Approximations for a Class of Semilinear Volterra Evolution Problems // SIAM J. Numer. Anal. 1977. Vol. 14, N. 5. P. 931–949.
- [93] *Tian H.* Asymptotic stability of numerical methods for linear delay parabolic differetial equations // Comput. Math. Appl. 2008. Vol. 56. P. 1758–1765.
- [94] *Van Der Houwen P.J., Sommeijer B.P., Baker C.T.H.* On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay // IMA J. Numer. Anal. 1986. Vol. 6. P. 1–23.
- [95] *Voigt W.* On finite-difference methods for parabolic functional-differential equations on unbounded domain. Sofia. Publ. House Bulgar. Acad. Sci. 1989.
- [96] *Yuan-Ming W., Pao C.V.* Time delay finite difference reaction-diffusion systems with nonquasimonotone functional // Numer. Math. 2006. N. 103. P. 485–513.

- [97] *Wang P., Meng F., Lui S.* Interval oscillation criteria for second order partial differential equations with delays // J. of Comput. and Appl. Math. 2008. Vol. 212. P. 397–405.
- [98] *Wang P., Wu Y., Cacceta L.* Forced oscillation of a class of neutral hyperbolic differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. 2005. Vol. 177. P. 301–308.
- [99] *Wu J.* Theory and Application of Partial Functional Differential Equations. Springer-Verlag. N.Y., 1996. 438 p.
- [100] *Wu J., Zou X.* Traveling Wave Fronts of Reaction-Diffusion Systems with Delay // J. of Dynamics and Differential Equations. 2001. Vol. 13, N. 3. P. 651–687.
- [101] *Zhang Q., Zhang C.* A compact difference scheme combined with extrapolation techniques for solving a class of neutral delay parabolic differential equations // Appl. Math. Lett. 2013. Vol. 26. P. 306–312.
- [102] *Zou X.* Delay induced traveling wave fronts in reaction diffusion equations of KPP-Fisher type // J. of Comput. and Appl. Math. 2002. Vol. 146. P. 309–321.
- [103] *Zou X.* Traveling waves for non-local delayed diffusion equations via auxiliary equations // J. Differential Equations. 2007. Vol. 237. P. 259–277.
- [104] *Zubik-Kowal B.* The method of lines for parabolic differential-functional equations // IMA J. Numer. Anal. 1997. Vol. 17. P. 103–123.
- [105] *Zubik-Kowal B.* Stability in the numerical solution of linear parabolic equations with delay term // BIT. 2001. Vol. 41. P. 191–206.
- [106] *Zubik-Kowal B., Vandewalle S.* Waveform relaxation for functional-differential equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. Vol. 21, N. 1. P. 207–226.

Научное издание

Пименов Владимир Германович

Разностные методы решения уравнений
в частных производных с наследственностью

Ответственный за выпуск	Д. Д. Шакирзянова
Редактор	С. Г. Галинова
Оригинал-макет	В. Г. Пименов

Подписано в печать 15.12.2014.

Формат 60×84 1/16. Бумага писчая.

Уч.-изд. л. 6,5. Усл. печ. л. 7,7. Тираж 100 экз. Заказ 1745.

Издательство Уральского университета

620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ

620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Тел.: + (343) 350-56-64, 350-90-13

Факс: +7 (343) 358-93-06

E-mail: press-urfu@mail.ru

Для заметок

Для заметок

Для заметок